Теорема 4. *Δ-виртуальная аффинная нормаль* $A_{n-m} = \left[A, \vec{e}_{\alpha}, \vec{A}_{n}\right]$ *гиперполосы* SH_m *совпадает с нормалью Бляшке* $B_{n-m}(A)$ *тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (24).*

Доказательство. В самом деле, с учетом соотношений (10) имеем

$$\boxed{} \qquad (26)$$

Из (26) и получаем условия (24).

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5. *Если для некоторого распределения Δ на гиперполосе* SH_m *справедливо одно из следующих условий: a) нормаль Трэнсона гиперполосы совпадает с нормалью Бляшке; b) Δ-виртуальная аффинная нормаль гиперполосы совпадает с нормалью Бляшке; c) Δ-виртуальная аффинная нормаль гиперполосы совпадает с нормалью Трэнсона, то справедливы и все три.*

Список литературы

1. *Лисицына И.Е.* Распределения на регулярной гиперполосе аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №. 30. С. 43 – 49.
2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства / Деп. в ВИНИТИ РАН. № 3342-В98. 105 с.
3. *Лисицына И.Е.* Нормализация Трэнсона гиперполосы H_m аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. №. 29. С. 38 – 40.

E. Lisitsyna

AFFINE NORMALS OF HIPERSTRIP SH_m

We find out analytic sings and geometric interpretation of: 1) affine normals, generated by adjoint distribution Δ and Δ* on base surface of the hyperstrip SH_m; 2) coinsidence of constructed affine normals; 3) coinsidence of affine normal, generated by distribution Δ, with projective normal of Foss.

УДК 514.76

В.И. Макеев

(Пензенский государственный педагогический университет)

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ИЗОМЕТРИИ

ОБЩИХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

Изучаются инфинитезимальные относительные изометрии веса *w* в общих метрических пространствах векторных элементов $g^*_{n,y}$ определенного типа. Установлены структуры всех кручений и кривизн обобщенной аффинной связности для $g^*_{n,y}$ с максимальной группой изометрий.

Пусть *M* – гладкое n-мерное многообразие, *T(M)*- его касательное расслоение.

Определение. Общим метрическим пространством векторных элементов с относительной метрикой называется пара $g^*_{n,y}=(M, g^*(x,y))$, $y\in T_x(M)$, $x\in M$, где $g^*(x,y)$- невырожденное симметрическое *M*-тензорное поле типа (0,2), компоненты которого относительны веса *w* и однородны фиксированной степени k по слоевым координатам.

Обозначим через *H* инфинитезимальную связность на *T*(*M*), через J-почти комплексную структуру на *T*(*M*). Обобщенной аффинной связностью *Λ* называется линейная связность ∇ на *T(M)*, для которой $\nabla_x J=0$ и $\nabla_x V\subset V$(V-вертикальное распределение), где ∇_x – ковариантная производная для линейной связности, *X* – векторное поле на *T(M)*. Предполагается, что *Λ* относительна, т.е. метрическая ($\Delta g^*(x,y)=0$, Δ – ковариантный дифференциал для *Λ*) при $2+nw\neq0$ и рекуррентная ($\Delta g^*(x,y)=\mu\ g^*(x,y)$) с 1-формой рекуррентности $\mu=\mu(x,y)$ при $2+nw=0$. Будем рассматривать регулярные пространства $g^*_{n,y}$, т.е. пространства, допускающие относительную связность *Λ*.

Пусть D,T и S^1 – *M*-тензорные поля смещения, h – кручение и v - кручение для *H* и *Λ*. Относительной изометрией веса *w*, короче *w*-изометрией, в $g^*_{n,y}$ с наперед заданными D, T, S^1 и 1-формой $\nu=\nu(x,y)$ называется дифференцируемое преобразование в *M*, естественное продолжение которого в *T*(*M*) сохраняет $g^*(x,y)$, D, T, S^1 при $2+nw\neq0$ и $g^*(x,y)$, D, T, S^1, ν при $2+nw=0$.

При работе с относительными величинами возникают известные [1] трудности. Поэтому считаем, что компоненты $g^*_{\alpha\beta}$ метрики $g^*(x,y)$ выражаются формулой

$$g^*_{\alpha\beta}(x,y) = \varphi^{k/2}\, g^{w/2}\, g_{\alpha\beta}(x,y), \tag{1}$$

где $\varphi=g_{\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta$, $g=\det\|g_{\alpha\beta}\|$, а $g_{\alpha\beta}$ суть (0)-однородные (абсолютные) компоненты положительно определенной метрики $g(x,y)$ общего метрического пространства $g_{n,y}=(M, g(x,y))$; $\alpha,\beta,\ldots = 1,\ldots,n$. В $g_{n,y}$ метрическая относительно $g_{n,y}$ обобщенная аффинная связность удовлетворяет условиям однородности и симметричности.

Пусть $F_\rho^{(v)} = \tilde{\nabla}_i J^i_{\rho^*}$, $F_\rho^{(h)} = \tilde{\nabla}_i J^i_\rho$, где J^i_j – компоненты J в адаптированном к *H* базисе, $\tilde{\nabla}_i$ - ковариантная производная относительно римановой связности; i, j=1,...,2n; ρ*=n+1,..., 2n. Заметим, что при $F_\rho^{(v)} = F_\rho^{(h)} = 0$ почти эрмитово многообразие пространства $g_{n,y}$ является почти семикелеровым, т.е. почти эрмитовым, в котором $\tilde{\nabla}_i J^i_j = 0$.

Инфинитезимальную w-изометрию, отвечающую инфинитезимальному конформному преобразованию, для которого $LF_\rho^{(v)} = 0$ (соотв. $LF_\rho^{(h)} = 0$) назовем инфинитезимальной *(v)w*-изометрией (соотв. *(h)w*-изометрией). Поскольку

$$LF_\rho^{(v)} = 2(n-1)\psi\cdot_\rho, \text{ а } LF_\rho^{(h)} = -2(n-1)X_\rho\psi,$$

где $\psi\cdot_\rho = \partial\psi/\partial y^\rho$, $X_\rho = \partial/\partial x^\rho - \Gamma_\rho^\alpha(x,y)\partial/\partial y^\alpha$ (Γ_ρ^α – компоненты *H*), то учитывая (1), можно получить следующую теорему, где для краткости записи вынесены соотношения:

$$L\,D=0,\ L\,T=0,\ L\,S^1=0 \qquad (2)$$

где *L* – производная Ли вдоль полного лифта векторного поля ξ на *M*.

Теорема 1. *В регулярном пространстве $g^*_{n,y}$ типа (1) векторное поле ξ на M при $2+k+nw \neq 0$ определяет инфинитезимальную w-изометрию, а при $2+k+nw = 0$ – инфинитезимальную (v)w-изометрию (соотв. (h)w- изометрию), если и только если выполняются условия:*

$$\text{а) } Lg(x,y)=0,\ (2),\ 2+nw\neq 0,\ 2+k+nw\neq 0; \qquad (3)$$

$$\text{б) } Lg(x,y)=0,\ (2),\ L\nu = 0,\ 2+nw = 0,\ k\neq 0; \qquad (4)$$

$$\text{в) } Lg(x,y)=2\psi g(x,y),\ \psi\cdot_\rho = 0,\ (2),\ 2+k+nw=0 \qquad (5а)$$

$$(Lg(x,y)=2\psi g(x,y),\ X_\rho\psi = 0,\ (2),\ 2+k+nw=0), \qquad (5б)$$

где $\psi = \psi(x,y)$ – скалярная функция.

Если условия интегрируемости системы уравнений (3) (соотв. (4), (5а или 5б)) выполняются тождественно, то $g^*_{n,y}$ допускает группу *w*-изометрий G_r максимальной размерности r=n(n+1)/2 (соотв. r=n(n+1)/2; r=(n+1)(n+2)/2, n≥3). Предполагая это, из соотношений интегрируемости можно установить определенные структуры всех *M*-тензорных полей кручений T, S^1, C, R^1, P^1 и кривизн R^2, P^2, S^2 связности *Λ* в каждом из трех случаев. При этом считаем, что *Λ* параллельная в случаях (3) и (4), т.е.

$$\Delta^{(h)}R^2=0,\ \Delta T=0,\ \Delta S^1=0,$$

где $\Delta^{(h)}$ – (h)-ковариантная производная для Λ. Получается, в частности, следующий результат, где $R_\beta{}^\alpha{}_{\mu\rho}$, $S_\beta{}^\alpha{}_{\mu\rho}$, $T_\beta{}^\alpha{}_\mu$ и $S_\beta{}^\alpha{}_\mu$ – компоненты R^2, S^2,T и S^1 соответственно.

Случай (3):

$$R_{\beta\alpha\mu\rho}=0,\ (R_{\beta\alpha\mu\rho}=g^*_{\alpha\sigma} R_\beta{}^\sigma{}_{\mu\rho}), \tag{6}$$

$$R_{\beta\alpha\mu\rho}=\Phi B(g^*_{\beta\mu}\, g^*_{\alpha\rho} - g^*_{\beta\rho}\, g^*_{\alpha\mu}), \tag{7}$$

где B – некоторая ($\neq$0) постоянная, а

$$\Phi=\varphi^{*\,-k/2+k+nw}\, g^{*\,-w/2+k+nw}\ (\varphi^*=g^*_{\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta,\ g^*=\det\|g^*_{\alpha\beta}\|);$$

$$R_{\beta\alpha\mu\rho}= g^*_{\alpha\mu}\Pi_{\beta\rho}- g^*_{\alpha\rho}\Pi_{\beta\mu} +g^*_{\beta\rho}\Pi_{\alpha\mu}-g^*_{\beta\mu}\Pi_{\alpha\rho}, \tag{8}$$

$$\Pi_{\beta\mu} =\Phi\cdot(-\frac{1}{2}\Omega g^*_{\beta\mu} + \frac{1}{\varphi^*}Q y^*_\beta\, y^*_\mu),$$

где $y^*_\beta= g^*_{\beta\sigma}y^\sigma$ и для постоянных Ω, Q случай Ω=0, Q$\neq$0 отсутствует;

$$S_{\beta\alpha\mu\rho}=\frac{A}{\varphi^*}(h_{\beta\mu}h_{\alpha\rho}-h_{\beta\rho}h_{\alpha\mu})\ (h_{\beta\mu}=g^*_{\beta\mu}-\frac{1}{\varphi^*}\, y^*_\beta\, y^*_\mu\ ,\ A=\mathrm{const}). \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть регулярное пространство $g^*_{n,y}$ типа (1) обладает при 2+nw$\neq$0, 2+k+nw $\neq$0 группой w-изометрий $G_{n(n+1)/2}$ и связность Λ параллельная. Тогда T=0, S^1=0, а компоненты кривизн R^2, S^2 можно выразить формулами (6)-(9).*

Пространство $g^*_{n,y}$, для которого R^2 =0 (R^2 – аналогично (7), (8)) назовем пространством постоянной нулевой кривизны (ненулевой кривизны, субпроективным многообразием Кагана [2]). Таким образом, при условиях теоремы 2 пространство $g^*_{n,y}$ так называемой непостоянной кривизны является субпроективным многообразием Кагана основного случая.

Случай (4):

$$T=0\ (n>3,\ a^2+(b+n)^2\neq 0;\ a,b=\mathrm{const}), \tag{10}$$

$$T_\beta{}^\alpha{}_\mu = \delta^\alpha_\beta\, T_\mu - \delta^\alpha_\mu\, T_\beta\ (n>4,\ a=0,\ b+n=0) \tag{11}$$

$$(T_\mu = \frac{\delta_1-\delta_2}{(n-1)\sqrt{\varphi}}\, y_\mu\ ,\ y_\mu = g_{\mu\sigma}y^\sigma;\ \delta_1,\delta_2=\mathrm{const}),$$

$$S^1=0\ (n>3,\ a^2+\delta_2{}^2+(b+n)^2\neq 0), \tag{12}$$

$$S_\beta{}^\alpha{}_\mu = \delta^\alpha_\beta\, S_\mu - \delta^\alpha_\mu\, S_\beta\ (n>4,\ a=0,\ b+n=0,\ \delta_2=0) \tag{13}$$

$$(S_\mu = \frac{t}{(n-1)\varphi}\, y_\mu\ ,\ t=\mathrm{const}),$$

$$S_{\beta\alpha\mu\rho}=\frac{Б}{\varphi^*}(h_{\beta\mu}h_{\alpha\rho}-h_{\beta\rho}h_{\alpha\mu})\ (Б=\mathrm{const}). \tag{14}$$

Теорема 3. *Если регулярное пространство $g^*_{n,y}$ типа (1) при 2+nw=0 и k$\neq$0 допускает группу w-изометрий $G_{n(n+1/2}$ и связность Λ параллельная, то* *оно является постоянной нулевой или ненулевой кривизны, а компоненты T, S^1 и S^2 можно выразить формулами (10)-(14).*

Случай (5а, 5б):

$$S_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}\, S_{\mu} - \delta^{\alpha}{}_{\mu}\, S_{\beta}\ (S_{\mu} = \frac{t}{(n-1)\varphi} y_{\mu}); \tag{15}$$

$$S_{\beta\alpha\mu\rho} \text{ – вида (9), но } A = \frac{(n-1)^2 - t^2}{(n-1)^2}. \tag{16}$$

Теорема 4. *Если регулярное пространство $g^*_{n,y}$ типа (1) при $2+k+nw=0$ допускает группу (v)w-изометрий (или (h)w-изометрий) $G_{(n+1)(n+2)/2}$, $n\geq 3$, то $T=0$, $R^1=0$, $P^1=0$, $R^2=0$, $P^2=0$, а S^1 и S^2 обладают компонентами вида (15),(16).*

Список литературы

1. *Thomas T.Y.* The differential invariants of generalized spaces. Cambridge, 1934. 243 p.

2. *Кручкович Г.И.* О пространствах В.Ф.Кагана // Каган В.Ф. Субпроективные пространства. М. Физматгиз, 1961. С. 163-195.

V.I. Makeev

INFINITESIMAL ISOMETRICS OF GENERAL METRIC SPACES OF VECTOR ELEMENTS WITH THE RELATIVE METRIC

We study infinitesimal relative isometrics of weight *w* in general metric paces of the vector elements $g^*_{n,y}$ of the certain type. The structure of the all torsion's and curvatures of the generalized affine connection for $g^*_{n,y}$ with maximum group of the isometrics has been established.

УДК 514.7

Т.Ю. Максакова

(Балтийский военно-морской институт)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ

Рассматриваются двойственные нормальные связности на центрированной тангенциально вырожденной гиперполосе CH^r_m проективного пространства P_n. Показано, что