УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-3

Заметка о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий

Рассматривается введенное Л. В. Степановой понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Показано, что это понятие связано с понятием минимальности для такой гиперповерхности. Установлено, что η-квазиомбилическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия является минимальной в том и только том случае, если она является вполне омбилической.

***Ключевые слова**:* почти эрмитово многообразие, почти контактная метрическая структура, η-квазиомбилическая гиперповерхность, минимальная гиперповерхность

1. О том, что на всякой ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется почти контактная метрическая структура, известно с середины прошлого века. В конце XX века опубликовано несколько серьезных работ о почти контактных метрических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, среди которых мы выделим интереснейшую статью Р. Мишры [1] и фундаментальное исследование Л. В. Степановой [2]. В работе Л. В. Степановой было введено понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия [2]. В настоящей заметке

Поступила в редакцию 02.05.2023 г.

будет показано, как это понятие соотносится с другим важнейшим понятием дифференциальной геометрии, а именно с понятием минимальной гиперповерхности.

2. Напомним [2], что под почти контактной метрической структурой на многообразии нечетной размерности N^{2n-1} понимают систему тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1; \Phi(\xi) = 0;\ \eta \circ \Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \qquad X, Y \in \aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь через Φ обозначено поле тензора типа (1,1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ — риманова метрика. Напомним также, что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} [3].

Как мы уже упоминали выше, понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия введено в рассмотрение Л.В. Степановой в [2]: гиперповерхность N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} называется η-квазиомбилической, если вторая квадратичная форма погружения N^{2n-1} в M^{2n} устроена таким образом:

$$\sigma(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle + h\eta(X)\eta(Y),$$

где $h = \sigma(\xi, \xi)$, $\lambda - const$. Очевидно, что если $h = 0$, то $\sigma(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$; в этом случае N^{2n-1} будет вполне омбилической гиперповерхностью многообразия M^{2n}. Если же $h = 0$ и при этом $\lambda = 0$, то $\sigma(X, Y) = 0$; в этом случае гиперповерхность N^{2n-1} будет вполне геодезической.

В [2] также получен ряд результатов о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитова многообразия. Например, доказано, что если через каждую точку квазикелерова многообразия M^{2n} проходит η-квазиомбилическая гиперповерхность N^{2n-1} с квазисасакиевой структурой, то многообразие является келеровым, а квазисасакиева структура является либо сасакиевой, либо гомотетичной сасакиевой.

Условие $h = \sigma(\xi, \xi) = 0$, однако, известно как необходимое и достаточное условие минимальности для специальных видов почти контактных метрических гиперповерхностей в почти эрмитовых многообразиях некоторых классов. Наверное, самый первый результат такого плана получен в [4]:

Теорема 1. *Сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли минимальна в том и только том случае, если* $\sigma(\xi, \xi) = 0$.

Гораздо более ценные результаты указанного вида (они не привязаны к 6-мерным подмногообразиям алгебры октав) содержатся в [5; 6] и других источниках. Например, условие $\sigma(\xi, \xi) = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы слабо косимплектическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия являлась минимальной [5].

3. Очевидная взаимосвязь между понятиями минимальности и η-квазиомбиличности гиперповерхности (конечно, ясно, что одно из них общегеометрическое, а другое присуще только почти контактным метрическим гиперповерхностям) позволяет пересмотреть, переоценить, а иногда и переформулировать некоторые результаты как из упомянутых выше статей, так и из исследования Л.В. Степановой [2]. Кроме того, можно получить целый ряд следствий, причем содержание некоторых из них представляется довольно интересным. Например, из упомянутого выше результата Л.В. Степановой из [2] и результата из [5] вытекает, что η-квазиомбилическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия является минимальной в том и только том случае, если она является вполне омбилической. Естественно возникает задача, связанная с тем, что приближенно келеровы многообразия включаются в класс квазикелеровых многообразий: существуют ли минимальные η-квазиомбилические гиперповерхности квазисасакиевых многообразий, отличные от омбилических?

Если же говорить более определенно, то такое естественное свойство гиперповерхности — свойство минимальности — в довольно обширной теории почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий изучено явно недостаточно. Например, в обзоре [2], посвященном именно данной тематике, о таких вещах сказано совсем немного. Таким образом, вывод, который мы делаем в конце нашей заметки, звучит следующим образом: теория минимальных почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий может получить новые (возможно, неожиданные) результаты, причем задел для подобных результатов есть уже сейчас.

Список литературы

1. *Mishra R.S.* Normality of the hypersurfaces of almost Hermite manifolds // J. Indian Math. Soc. 1995. Vol. 61. P. 71—79.

2. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

3. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Банару М.Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2003. Т. 194, №8. С. 13—24.

5. *Банару М.Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, №2. С. 357—364.

6. *Банару М.Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. №3. С. 60—62.

7. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №4. P. 513—537.

Для цитирования: *Банару М. Б.* Заметка о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 23—28. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-3.

MSC 514.76

M. B. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-3

A note on η-quasi-umbilical hypersurfaces in almost Hermitian manifolds

Submitted on May 02, 2023

In the present note, we consider the introduced by Lidia Vasil'evna Stepanova notion of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold. We show that the notion of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold is connected with the notion of a minimal hypersurface in this manifold.

Using the classical theory of minimal hypersurfaces in Riemannian manifolds and Kirichenko — Stepanova general theory of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds, we establish that an η-quasi-umbilical hypersurface of a nearly Kählerian manifold is minimal if and only if this hypersurface is totally umbilical.

Taking into account the connection between the notions of a minimal hypersurface and of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold, we conclude that some well-known results in the theory of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds can be reformulated.

The problem of the existence of a non-umbilical minimal η-quasi-umbilical hypersurface of a quasi-Kählerian manifold is posed.

Keywords: almost Hermitian manifold, almost contact metric structure, η-quasi-umbilical hypersurface, minimal hypersurface

References

1. *Mishra, R.S.:* Normality of the hypersurfaces of almost Hermite manifolds. J. Indian Math. Soc., 61, 71—79 (1995).

2. *Stepanova, L.V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD Thesis. Moscow (1995).

3. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

4. *Banaru, M.B.:* On Sasakian hypersurfaces in 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., **194**:8, 1125—1136 (2003).

5. *Banaru, M.B.:* On the type number of nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kählerian manifolds. Fundam. Prikl. Math., **8**:2, 357—364 (2002).

6. *Banaru, M.B.:* Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds. Mosc. Univ. Math. Bull., **69**:3, 132—134 (2014).

7. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

For citation: Banaru, M.B. A note on η-quasi-umbilical hypersurfaces in almost Hermitian manifolds. DGMF, 54 (1), 23—28 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-3.