Список литературы

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М., 1955.
2. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1969.
3. *Бурлаков И. М.* Геометрические структуры на линейных алгебрах // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 29—34.
4. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.
5. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. М., 1987.

I. Burlakov

Algebras with conjugation and geometry of nonquadratic forms

Algebras with conjugation, representing a generalization of composition algebras are considered. Such algebras on a linear space give geometric structure with a fundamental form of arbitrary degree. On smooth manifolds fundamental form is defined by means of bundles of algebras with conjugation and sets almost Riemannian structure on a manifold.

УДК 514.76

С. В. Галаев
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
sgalaev@mail.ru

О характеристических классах Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств

На многообразии с почти контактной метрической структурой определяется N-продолженная симплектическая связность. С помощью N-продолженной симплектической связности определяются обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств. Доказывается, что все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю.

Ключевые слова: почти контактная кэлерова структура, N-продолженная симплектическая связность, обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактного метрического пространства.

1. Введение. Для классификации интегрируемых гамильтоновых систем В.В. Трофимовым [1] был разработан метод построения геометрических инвариантов, основанный на обобщении классов Маслова. В связи с конструкциями обобщенных классов Маслова естественным образом возникают симплектические связности. Характеристические классы лагранжевых подмногообразий N^n стандартного симплектического пространства R^{2n} определяются с помощью отображения, сопоставляющего каждой точке $x \in N^n$ перенесенного в начало $0 \in R^{2n}$ касательного пространства T_xN^n. В случае произвольного симплектического многообразия параллельный перенос касательных пространств лагранжевых подмногообразий осуществляют симплектические связности [1]. Новое обобщение классов Маслова, связанное с необходимостью построения геометрических инвариантов, возникающих при исследовании аналогов интегрируемых гамильтоновых систем в контактном случае, основано на введении внутренней и продолженной связностей [2].

Контактная структура (X, η, D) выступает аналогом симплектической структуры для многообразия нечетной размерности $2m+1$. Ограничение дифференциальной 2-формы $\omega = d\eta$ на распределении D контактной структуры задает замкнутую невырожденную форму. В случае почти контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ на распределении D возникает еще одна невырожденная 2-форма — фундаментальная форма структуры Ω. В общем случае $\Omega \neq d\eta$. Формы

ω, Ω относятся к классу допустимых тензорных структур к распределению D [3]. Замкнутая допустимая 2-форма в настоящей работе называется допустимой симплектической структурой. Таким образом, допустимые симплектические структуры естественным образом возникают на почти контактных метрических пространствах. Характеристические классы лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств определяются помощью N-продолженной симплектической связности, задающей параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых и сохраняющей допустимую симплектическую форму.

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии X вводится понятие допустимой симплектической структуры. Определяются внутренняя и N-продолженная симплектические связности. В третьем разделе с помощью N-продолженной симплектической связности определяются обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств. Доказывается, что все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю.

2. Внутренняя и N-продолженная симплектические связности. Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, ΓTX — модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^{∞}. Предположим, что на X задана почти контактная метрическая структура $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ [3]. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^{\perp} = span\left(\vec{\xi}\right)$ — его оснащение: $TX = D \oplus D^{\perp}$. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = span\left(\vec{\xi}\right)$ и называется вектором Риба. Будем называть

D распределением почти контактной метрической структуры. Почти контактное кэлерово пространство удовлетворяет следующим условиям: $d\Omega = 0$, $N_{\varphi} + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_{\varphi}(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Почти контактные кэлеровы пространства введены автором в работе [2]. Будем называть почти контактное метрическое пространство почти нормальным, если выполнено условие $N_{\varphi} + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$. Таким образом, почти контактное кэлерово пространство — это почти нормальное почти контактное метрическое пространство с замкнутой фундаментальной формой.

Тензорное поле *t* типа *(p,q)*, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым (к распределению D)*, если *t* обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ — допустимое тензорное поле типа (1,1). Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Допустимую замкнутую внешнюю дифференциальную 2-форму максимального ранга будем называть *допустимой симплектической 2-формой*. Таким образом, в контактном случае форма ω=$d\eta$ представляет собой естественный пример допустимой симплектической формы. Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t_b^a = A_{a'}^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}$, где $A_{a'}^a = \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$. Пусть ω — произвольная допустимая внешняя 2-форма максимального ранга. В адаптированных координатах ненулевые компоненты ее внешнего дифференциала имеют следующий вид:

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab}),\ d\omega_{nab} = \frac{1}{3}\partial_n\omega_{ab}.$$

Будем называть допустимую тензорную структуру, сохраняющую постоянными компоненты в некотором адаптированном базисе, *интегрируемой допустимой тензорной структурой*.

Теорема 1 [3]. *Допустимая почти комплексная структура* φ *интегрируема тогда и только тогда, когда почти контактная метрическая структура почти нормальна.*

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D,π,X). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\widetilde{D}=\pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D\to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D}=HD\oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha},x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^{\alpha},x^{n+a})$, такого, что $HD=span\left(\vec{\varepsilon}_a\right)$, где $\vec{\varepsilon}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n-$ $-G_a^b\partial_{n+b}$. В случае когда $G_b^a(x^{\alpha},x^{n+a})=\Gamma_{bc}^a(x^{\alpha})x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В настоящей работе уточняется введенное ранее [2] понятие продолженной связности. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N: D\to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D,π,X), определяемую разложением $TD=\widetilde{HD}\oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD}=HD\oplus span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}}=\vec{\varepsilon}-(N\vec{x})^{v}$, $\vec{\varepsilon}=\partial_n$, $\vec{x}\in D$, $(N\vec{x})^{v}$ — вертикальный лифт.

Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. Назовем кручением N-продолженной связности кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. Пусть ω — допустимая симплектическая структура. Внутреннюю линейную связность ∇ будем называть внутренней симплектической связностью, если $\nabla_{\vec{x}} \omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. N-продолженную связность без кручения $\nabla^N = (\nabla, N)$ будем называть N-продолженной симплектической связностью, если $\nabla^N \omega = 0$. Последнее равенство сводится к двум равенствам: $\nabla^N_{\vec{x}} \omega(\vec{y}, \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\nabla^N_{\vec{\xi}} \omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D$. Таким образом, N-продолженная симплектическая связность получается из внутренней симплектической связности добавлением эндоморфизма N, такого, что выполняется $\nabla^N_{\vec{\xi}} \omega(\vec{y}, \vec{z}) = 0$. Существует бесконечно много N-продолженных симплектических связностей. Для доказательства существования бесконечного множества внутренних симплектических связностей достаточно повторить соответствующие рассуждения, имеющие место в геометрии симплектических многообразий. Покажем, что каждую внутреннюю симплектическую связность можно продолжить бесчисленным множеством способов до N-продолженной симплектической связности. Действительно, пусть $\nabla^N_{\vec{\xi}}$ — произвольная N-продолженная симплектическая связность. Легко убедиться, что связность $\nabla^{N_1}_{\vec{\xi}}$ такая, что $\nabla^{N_1}_{\vec{\xi}} \vec{x} = \nabla^N_{\vec{\xi}} \vec{x} + N_2 \vec{x}$, где $\omega(N_2 \vec{x}, \vec{y}) = \omega(N_2 \vec{y}, \vec{x})$, является N-продолженной симплектической связностью. Причем, $N_1 = N + N_2$.

Теорема 2. *Допустимая дифференциальная 2-форма максимального ранга ω является допустимой симплектической формой тогда и только тогда, когда существует совместимая с ней симметричная связность Бежанку [5].*

Назовем симметричную связность $\nabla^B = (\nabla, 0)$, сохраняющую допустимую симплектическую структуру, *продолженной симплектической связностью Бежанку*. Связность Бежанку $\nabla^B = (\nabla, 0)$ будем называть *продолженной метрической связностью Бежанку*, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность.

3. Обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактного метрического пространства. Пусть X — гладкое многообразие с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Для каждой точки $x \in X$ подпространство $D_x \subset T_x X$ служит симплектическим линейным пространством относительно фундаментальной формы $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$. Назовем подмногообразие $Y \subset X$ лежандровым подмногообразием почти контактного метрического многообразия, если в каждой точке $y \in Y$ касательное пространство $T_y Y$ является лагранжевым подпространством пространства D_x. Опишем обобщение конструкции В. В. Трофимова на случай многообразия с почти контактной метрической структурой. Пусть x_0 — фиксированная точка многообразия X. Определим отображение $f : [X, Y] \to G_m(D_{x_0})$, где $[X, Y]$ — пространство путей $\alpha : [0,1] \to X$, таких, что $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) \in Y$, $G_m(D_{x_0})$ — грассманиан, порожденный пространством D_{x_0}. Пусть, теперь $\nabla^B = (\nabla, 0)$ — продолженная симплектическая связность Бежанку. Образ пространства $T_{\alpha(1)}Y$ при соответствующем параллельном переносе в точку $\alpha(0) = x_0$ обозначим $f(\alpha)$. Рассмотрим отображение f^* в обобщенной теории когомологий: $f^* : h^*(G_m(D_{x_0})) \to h^*([X, Y])$. Следуя

В.В. Трофимову, назовем классы когомологий $f^*(\alpha)$ обобщенными классами Маслова лежандрова подмногообразия Y. В случае, когда X — почти контактное кэлерово пространство, выполняется равенство $\nabla^B\Omega = 0$, где ∇^B — продолженная метрическая связность Бежанку.

Теорема 3. *Все обобщенные классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю.*

Доказательство. Связность ∇^B является одновременно метрической и симплектической связностью. Следовательно, отображение $f:[X,Y] \to G_m(D_{x_0})$ тривиально, поэтому все обобщенные классы Маслова равны нулю.

Список литературы

1. *Трофимов В.В.* Индекс Маслова лагранжевых подмногообразий симплектических многообразий // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. 1988. Вып. 23. С. 190—194.

2. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Математика. 2014. №8. С. 42—52.

3. *Галаев С.В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16—22.

4. *Вагнер В.В.* Геометрия (n-1)—мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1941. Вып. 5. С. 173—255.

5. *Bejancu A.* Kähler contact distributions // Journal of Geometry and Physics. 2010. №60, P. 1958—1967.

S. Galaev

About characteristic Maslov classes of Legendre submanifolds of almost contact Kähler spaces

N-extended symplectic connection is defined on manifold with almost contact metric structure. Using N-extended symplectic connection we define generalized Maslov classes of Legendre submanifolds of almost contact metric spaces. It is proved that all the characteristic Maslov classes of totally geodesic Legendre submanifolds of almost contact Kahler spaces equal to zero.