УДК 514.75

О НЕГОЛОНОМНЫХ КОМПОЗИЦИЯХ НОРДЕНА -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И. П о п о в

(Калининградский государственный университет)

В работе рассматривается регулярное гиперполосное распределение (M) m-мерных линейных элементов аффинного пространства A_n (n-1>m), которое в дальнейшем назовем -распределением [1]. Доказано, что в дифференциальной окрестности 1-го порядка к базисному M-распределению инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка (χ,) внутренних HM-виртуальных нормалей 1-го рода, а в дифференциальной окрестности порядка t≥2 пять полей однопараметрических пучков внутренних HM-виртуальных нормалей 1-го рода. Построенные поля внутренних HM-виртуальных нормалей 1-го рода порождают соответственно в дифференциальной окрестности 1-го порядка пучок внутренних неголономных композиций Нордена ($\chi_{(\sigma)}$;M) H-распределения, а в дифференциальной окрестности порядка t≥2 пять однопараметрических семейств неголономных композиций Нордена. Выясняется , что если регулярное -распределение взаимно ($\Lambda_{i\alpha}$≡0), то в окрестности 1-го порядка пучок ($\chi_{(\sigma)}$;M) вырождается в неголономную композицию Нордена (χ;M) , а в окрестности порядка t≥2 из пяти однопараметрических семейств неголономных композиций остаются только три семейства соответствующих полям пучков
HM-виртуальных нормалей 1-го рода.

Схема использования индексов [1] :

$$I,J,K... = \overline{1,n}\,;\ a,b,c... = \overline{1,n-1}\,;\ i,j,k,l,s,t = \overline{1,m}\,;$$

$$\alpha,\beta,\gamma... = \overline{m+1,n-1}\,;\ \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma} = \overline{m+1,n}\,.$$

§1. Неголономные композиции Нордена оснащающего H-распределения в окрестности 1-го порядка

1. Известно [1], что относительно репера нулевого порядка R^0 распределение задается уравнениями

$$\begin{cases} \omega_i^n = \Lambda_{iK}\omega^K\,,\ \omega_i^\alpha = M_{iK}^\alpha\omega^K\,,\ \omega_\alpha^n = H_{\alpha K}\omega^K\,, \\ \nabla\Lambda_{iK} + \Lambda_{iK}\omega_n^n = \Lambda_{iKL}\omega^L,\ \ \nabla M_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}\omega_n^\alpha = M_{iKL}^\alpha\omega^L, \\ \nabla H_{\alpha K} + H_{\alpha K}\omega_n^n - \Lambda_{iK}\omega_\alpha^i = H_{\alpha KL}\omega^L. \end{cases} \tag{1.1}$$

Так как   -распределение [1] регулярно, то главный фундаментальный тензор $\left\{\Lambda_{ij}\right\}$ 1-го порядка невырожденный, т.е.

$$\Lambda_0 = \det\left\|\Lambda_{ij}\right\| \neq 0. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) позволяет ввести в рассмотрение обращенный фундаментальный тензор $\left\{\Lambda^{ij}\right\}$ 1-го порядка, компоненты которого удовлетворяют соотношениям:

$$\Lambda^{ik}\Lambda_{kj} = \delta^i_j\,,\ \Lambda_{ik}\Lambda^{kj} = \delta^j_i\,;\ \nabla\Lambda^{ik} - \Lambda^{ik}\omega^n_n = -\Lambda^{is}\Lambda^{tk}\Lambda_{stL}\omega^L. \tag{1.3}$$

2. Произвольную НМ-виртуальную нормаль ν_{n-m-1} 1-го рода [1] М-распределения в репере R^0 определим в каждом центре А   -распределения векторами

$$\vec{\nu}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \nu^i_\alpha \vec{e}_i\ .$$

Из условия инвариантности плоскости ν_{n-m-1} следует, что дифференциальные уравнения

$$\nabla\nu^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha K}\omega^K \tag{1.4}$$

задают поле инвариантных НМ-виртуальных нормалей ν_{n-m-1} 1-го рода.

Используя уравнения (1.1) убеждаемся, что функции

$$\nu^i_\alpha \equiv \chi^i_\alpha = -H_{\alpha j}\Lambda^{ji} \tag{1.5}$$

удовлетворяют уравнениям (1.4). Значит, квазитензор $\left\{\chi^i_\alpha\right\}$ (1.5) задает поле внутренних инвариантных НМ-виртуальных нормалей 1-го рода в окрестности 1-го порядка.

3. Компоненты геометрического объекта $\left\{H^a_i\right\}$, определяющего базисную М-плоскость в репере R^0, имеют следующие значения:

$$H^k_i = \delta^k_i\,,\ H^\alpha_i = 0\,. \tag{1.6}$$

Так как векторы $\vec{H}_a = H^b_a \vec{e}_b$, где

$$H^i_\alpha = \nu^i_\alpha\,,\ H^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha\,, \tag{1.7}$$

линейно независимы, то для матрицы $\left\|H^b_a\right\|$ существует обратная

$$\left\|\overset{*}{H}{}^b_a\right\| = \left\|\begin{matrix} \overset{*}{H}{}^i_k & \overset{*}{H}{}^i_\alpha \\ \overset{*}{H}{}^\beta_k & \overset{*}{H}{}^\beta_\alpha \end{matrix}\right\|.$$

Компоненты матриц $\left\|H^b_a\right\|$ и $\left\|\overset{*}{H}{}^b_a\right\|$ связаны соотношениями

$$H_a^b \cdot \overset{*}{H}{}_c^a = \delta_c^b\ ,\ \ \overset{*}{H}{}_b^a H_a^c = \delta_b^c\ . \tag{1.8}$$

Учитывая соотношения (1.6)-(1.8), находим матрицу

$$\left\| \overset{*}{H}{}_a^b \right\| = \begin{Vmatrix} \delta_k^i & -\nu_\alpha^i \\ 0 & \delta_\alpha^\beta \end{Vmatrix}. \tag{1.9}$$

Ведем в рассмотрение тензор

$$P_a^b = \delta_a^b - 2H_i^b \overset{*}{H}{}_a^i\ ,$$

компоненты которого найдем из соотношений (1.6), (1.7) и матрицы (1.9). Имеем

$$P_k^i = -\delta_k^i\ ,\ P_\alpha^i = 2\nu_\alpha^i\ ,\ P_k^\beta = 0\ ,\ P_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta. \tag{1.10}$$

Тензор $\left\{P_a^b\right\}$, компоненты которого заданы формулами (1.10), удовлетворяют условиям

$$P_a^b P_c^a = \delta_c^b. \tag{1.11}$$

Поле аффинора $\left\{P_a^b\right\}$ (1.11) задает в общем случае неголономную π-структуру (ν, M) на H-распределении, базовыми распределениями которой являются распределение плоскостей ν_{n-m-1} (распределение НМ-виртуальных нормалей 1-го рода ν_{n-m-1}) и M-распределение. Следуя терминологии Р.Ф.Домбровского [3], будем говорить, что поле аффинора $\left\{P_a^b\right\}$ (1.11) задает на H-распределении неголономную композицию Нордена (ν, M), внутренним инвариантным образом присоединенную к -распределению в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

4. В окрестности 1-го порядка рассмотрим функции

$$\ {}_\alpha^i = -\Lambda^{ij}\Lambda_{j\alpha}\ , \tag{1.12}$$

удовлетворяющие уравнениям (1.4). Квазитензор $\left\{\ {}_\alpha^i\right\}$ (1.12) в каждом центре -распределения задает еще одну НМ-виртуальную нормаль 1-го рода элемента M-распределения, вообще говоря, отличную от ранее построенной НМ-виртуальной нормали χ (1.5). Другими словами, тензор

$$S_\alpha^i = \chi_\alpha^i - \ {}_\alpha^i\ ,\ \nabla S_\alpha^i = S_{\alpha K}^i \omega^K \tag{1.13}$$

не равен тождественно нулю.

Таким образом, имеют место предложения

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка к базисному M-распределению данного -распределения внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка* $(\chi,\ )$ *НМ-вирнтуальных нормалей 1-го рода, которое определяется пучком квазитензоров*

$$\chi^i_\alpha(\eta) = \chi^i_\alpha + \eta S^i_\alpha \ , \qquad (1.14)$$

где η *- абсолютный инвариант.*

Если для -распределения $\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$*, то поле однопараметрического пучка* $(\chi, \ )$ *вырождается в поле НМ-виртуальных нормалей 1-го рода* χ.

Теорема 2. *Н-распределение несет однопараметрическое семейство внутренних инвариантных неголономных композиций Нордена* $(\chi_{(\eta)}, M)$*, определенных в дифференциальной окрестности 1-го порядка пучком аффиноров* $\{P^a_b(\eta)\}$*, где*

$$\|P^b_a(\eta)\| = \begin{Vmatrix} -\delta^i_k & 2\chi^i_\alpha(\eta) \\ 0 & \delta^\beta_\alpha \end{Vmatrix} .$$

Базовыми распределениями семейства $(\chi_{(\eta)}, M)$ *неголономных композиций Нордена являются распределения плоскостей* $\chi(\eta)$ *и* M*, где* $\chi(\eta)$*- плоскости пучка* $(\chi, \ )$*, соответствующие пучку квазитензоров* $\{\chi^i_\alpha(\eta)\}$ *(1.14). Если* $\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$*, то пучок* $(\chi_{(\eta)}, M)$ *неголономных композиций Нордена оснащающего Н-распределения вырождается в неголономную композицию Нордена* (χ, M).

§2. Неголономные композиции Нордена, ассоциированные с оснащающим Н-распределением в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$

1. Рассмотрим симметрический тензор [1]

$$m^{\$}_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(M^{\$}_{ij} + M^{\$}_{ji}\right), \ M^{\$}_{ij} = \left\{M^{\alpha}_{ij}; \Lambda_{ij} \equiv M^{n}_{ij}\right\} \ ; \ \nabla m^{\$}_{ij} = m^{\$}_{ijK}\omega^K . \qquad (2.1)$$

Будем в дальнейшем полагать, что $n - m < \dfrac{m(m+1)}{2}$. При этом условии, как следует из работы [4], можно построить нетривиальный относительный инвариант $I = I(m^{\$}_{ij})$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$d\ln I - 2(n-m)\omega^i_i + m\omega^{\$}_{\$} = I_K\omega^K .$$

Следуя работе [5], при помощи инварианта **I** построим симметрический тензор 1-го порядка $\{m^{ij}_{\$}\}$, где

$$m^{ij}_{\$}=\frac{\partial \ln I}{\partial M^{\$}_{ij}}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial \ln I}{\partial m^{\$}_{ij}}\ ;\ \nabla m^{ij}_{\$}=m^{ij}_{\$K}\omega^{K}. \qquad (2.2)$$

Компоненты тензоров $\left\{m^{ij}_{\$}\right\}$ и $\left\{M^{\$}_{ij}\right\}$ удовлетворяют следующим соотношениям [5] :

$$m^{ij}_{\$}M^{\beta}_{ij}=m\delta^{\beta}_{\$}\ ,\ m^{ik}_{\$}M^{\$}_{jk}=(n-m)\delta^{i}_{j}\ ,\ M^{\$}_{ijK}m^{ij}_{\$}=I_{K}\ .$$

2. Совокупность величин

$$T^{\alpha}_{ij}=M^{\alpha}_{ij}-\Lambda_{ij}\nu^{\alpha}_{n}\ .$$

образует в общем случае невырожденный тензор порядка $t\geq 2$, где t - порядок охвата квазитензора $\left\{\nu^{a}_{n}\right\}$, задающего инвариантную нормаль первого рода - распределения. Введем для тензора $\left\{T^{\alpha}_{ij}\right\}$ обратный симметрический тензор $\left\{T^{ik}_{\alpha}\right\}$ [5] порядка $t\geq 2$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$T^{ik}_{\alpha}T^{\beta}_{ik}=m\delta^{\beta}_{\alpha}\ ,\ T^{ik}_{\alpha}T^{\alpha}_{jk}=(n-m-1)\delta^{i}_{j}\ ;\ \nabla T^{ij}_{\alpha}=T^{ij}_{\alpha K}\omega^{K}.$$

С помощью тензоров $\left\{T^{\alpha}_{ij}\right\}$ и $\left\{T^{ik}_{\alpha}\right\}$ введем в рассмотрение следующий тензор $\left\{T^{j}_{i}\right\}$ порядка $t\geq 2$:

$$T^{j}_{i}=T^{jk}_{\alpha}T^{\alpha}_{ki}\ ;\ \nabla T^{j}_{i}=T^{j}_{iK}\omega^{K}. \qquad (2.3)$$

Можно показать [5], что тензор $\left\{T^{j}_{i}\right\}$ невырожденный. Следовательно, для тензора существует обратный тензор $\left\{T^{j}_{i}\right\}$:

$$T^{i}_{k}T^{k}_{j}=\delta^{i}_{j}\ ,\ T^{k}_{i}T^{j}_{k}=\delta^{j}_{i}\ ;\ \ \nabla T^{j}_{i}=T^{j}_{iK}\omega^{K}.$$

Теперь последовательно вводим в рассмотрение два квазитензора порядка $t\geq 2$:

$$\Im^{i}_{\alpha}=\left(\Lambda_{k\alpha}\nu^{\beta}_{n}-M^{\beta}_{k\alpha}\right)T^{kj}_{\beta}T^{i}_{j}\ ,\ \nabla\Im^{i}_{\alpha}+\omega^{i}_{\alpha}=\Im^{i}_{\alpha K}\omega^{K}; \qquad (2.4)$$

$${}^{i}_{\alpha}=t^{i}_{\alpha}-m^{ij}_{\alpha}T^{k}_{j}f_{k}\ ,\ \nabla\ {}^{i}_{\alpha}+\omega^{i}_{\alpha}=\ {}^{i}_{\alpha K}\omega^{K}. \qquad (2.5)$$

где

$$f_{k}=-\frac{1}{n-m}\left[M^{\alpha}_{k\alpha}+M^{\alpha}_{ki}\chi^{i}_{\alpha}-\left(\Lambda_{k\alpha}+\Lambda_{ki}\chi^{i}_{\alpha}\right)\nu^{\alpha}_{n}\right].$$

Квазитензоры (2.4) и (2.5) в общем случае различны и определяют соответственно разные НМ-виртуальные нормали $\Im(A)$ и (A) текущего элемента М-распределения, которые в свою очередь отличны от ранее построенных НМ-виртуальных нормалей $\chi(A)$ и (A).

Резюмируя, приходим к следующим теоремам.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности порядка* $t \geq 2$ *(порядок t определен порядком охвата объекта* $\{\nu_n^a\}$ *нормали 1-го рода **H**-распределения) к M-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются в общем случае пять полей однопараметрических пучков* $(\ ,\chi)$, $(\ , \ )$, $(\ ,\Im)$, $(\Im,\chi)$, $(\Im, \ )$ *НМ-виртуальных нормалей 1-го рода, а при* $\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$- *только три поля НМ-виртуальных нормалей 1-го рода* $(\ ,\chi)$, $(\Im,\chi)$, $(\ ,\Im)$.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности порядка* $t \geq 2$ *к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются (при* $\Lambda_{i\alpha} \neq 0$ *) в общем случае пять однопараметрических семейств неголономных композиций Нордена, соответствующих полям однопараметрических пучков* $(\ ,\chi)$, $(\ , \ )$, $(\ ,\Im)$, $(\Im,\chi)$, $(\Im, \ )$ *НМ-виртуальных нормалей 1-го рода, а при* $\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$- *три однопараметрических семейства неголономных композиций Нордена, соответствующих полям однопараметрических пучков* $(\ ,\chi)$, $(\Im,\chi)$, $(\ ,\Im)$ *НМ-виртуальных нормалей 1-го рода.*

Библиографический список

1. Попов Ю.И. Поля геометрических объектов гиперполосного -распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87. № 6807-В87.
2. Норден А.П. Теория композиций // Проблемы геометрии. М., 1987. Т.10. С. 117-145.
3. Домбровский Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Всесоюз. науч. конф. по неевклид. геометрии “150 лет геометрии Лобачевского”. Казань: Тезисы докл. М., 1976. С. 69.
4. Швейкин П.И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 331-424.
5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Там же, 1971. Т. 3. С. 49-94.

Ju. I. P o p o v

ON NONHOLONOMIC NORDEN'S COMPOSITIONS OF H-DISTRIBUTIONS OF AFFINE SPACE

Regular hiperstrip distribution H(M) of m-dimensional linear elements of affine space $A_n(n-1>m)$ is considered in the article, which is shortly denoted as H-distribution. The H-distribution represents a pair of distributions consisting of the base M-distribution of the first kind of m-dimensional linear elements and of the equipping

distribution of the second kind of hyperplanar elements with incidence relation of their corresponding elements at the general centre of the form $A \in M(A) \in H(A)$.

It is proved that in the differential neighbourhood of the first order a field of one-parameter bundle (χ ,) of interior HM-virtual normals is joined to the base M-distribution and in the differential neighbourhood of the order $t \geq 2$ five fields of one-parameter bundles (, χ), (,), (,), (, χ), (,) of the interior HM-virtual normals of the first kind are joined to the same base M-distribution**.**

Constructed fields of the interior HM-virtual normals of the first kind generate respectively in the differential neighbourhood of the first order a bundle of interior nonholonomic compositions of Norden ($\chi_{(\eta)}$, M) of H-distribution, and in the differential neighbourhood of the order $t \geq 2$ five one-parameter families of nonholonomic compositions of Norden.

It becomes clear, that if regular H-distribution is mutual ($\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$) then in the neighbourhood of the first order bundle ($\chi_{(\eta)}$; M) degenerates in the nonholonomic composition of Norden (χ, M), and in the neighbourhood of the order $t \geq 2$ from five one-parameter families of nonholonomic compositions remain only three families corresponding to the fields of one-parameter bundles (, χ), (, χ), (,) of HM-virtual normals of the first order.