УДК 514.75

А. В. Вялова[1]

[1] _Калининградский государственный технический университет, Россия_

vyalova.alexa@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-6

Псевдотензоры кривизны и кручения коаффинной связности в касательном расслоении к многообразию гиперцентрированных плоскостей

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперцентрированных плоскостей, размерность которого совпадает с размерностью образующей плоскости. Над ним возникают главные расслоения, структурные формы которых связаны соотношениями. В главном расслоении линейных корепперов задана коаффинная связность. Доказано, что объекты кривизны и кручения коаффинной связности образуют псевдотензоры.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство гиперцентрированных плоскостей, коаффинная связность, псевдотензор кривизны, псевдотензор кручения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$ $(I, ... = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \ \ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A . \tag{1}$$

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

Структурные уравнения проективной группы $GP(n)$ (см., напр., [1]) запишем в виде

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \tag{2}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость P_m с многомерным центром P_{m-1}, которую обозначим P_m^{m-1} [2]. Произведем разбиение значений индексов:

$$I = \{i, \alpha\}:\ i, ... = \overline{1, m},\ \alpha, ... = \overline{m+1, n}.$$

Специализируем подвижной репер $R = \{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P_m, при этом вершины A_i — в ее центр P_{m-1}. Из деривационных формул (1) имеем

$$\begin{gathered} dA = \theta A + \omega^i A_i + \omega^\alpha A_\alpha, \quad dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A, \\ dA_\alpha = \theta A_\alpha + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A. \end{gathered} \tag{3}$$

Формулы (3) дают уравнения стационарности гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1} [3]:

$$\omega^\alpha = 0,\ \ \omega_i^\alpha = 0,\ \ \omega_i = 0. \tag{4}$$

Выбирая m форм ω_i в качестве базисных, запишем уравнения многообразия V_m — семейства гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1} в виде

$$\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha i}\omega_i,\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_i^{\alpha j}\omega_j. \tag{5}$$

Замечание. Внешняя плоскость P_m двойственна плоскости Π_{n-m-1}, а внутренняя P_{m-1} — плоскости Π_{n-m}. Пара (P_m, P_{m-1}) двойственна обобщенному пространственному элементу (Π_{n-m-1}, Π_{n-m}), $\Pi_{n-m-1} \subset \Pi_{n-m}$.

Найдем внешние дифференциалы базисных форм

$$D\omega_i = \theta_i^j \wedge \omega_j, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \Lambda_i^{\alpha j}\omega_\alpha . \qquad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5) и разрешая по лемме Картана, получаем систему дифференциальных уравнений на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda^1 = \{\Lambda^{\alpha i}, \Lambda_i^{\alpha j}\}$

$$\Delta\Lambda^{\alpha(i)} - \Lambda_j^{\alpha i}\omega^j = \Lambda^{\alpha ij}\omega_j, \quad \Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = \Lambda_i^{\alpha jk}\omega_k , \qquad (7)$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = d\Lambda_i^{\alpha j} + \Lambda_i^{\alpha k}\theta_k^j + \Lambda_i^{\beta j}\omega_\beta^\alpha - \Lambda_k^{\alpha j}\omega_i^k ,$$

причем $\Lambda_i^{\alpha[jk]} = 0, \ \Lambda^{\alpha[ij]} = 0$.

Утверждение 1. *Фундаментальный объект 1-го порядка* $\Lambda^1 = \{\Lambda^{\alpha i}, \Lambda_i^{\alpha j}\}$ *семейства* V_m *является псевдотензором* [1], *содержащим подпсевдотензор* $\Lambda_i^{\alpha j}$.

Исследование многообразия V_m в репере нулевого порядка приводит к разбиению структурных форм ω^I, ω_J^I, ω_I на две совокупности: первичные формы $\omega^\alpha, \omega_i^\alpha, \omega_i$, включающие базисные формы ω_i, и вторичные формы $\omega^i, \omega_j^i, \omega_\alpha, \omega_\alpha^i, \omega_\beta^\alpha$, внешние дифференциалы которых имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega_j \wedge \omega^{ij}, \qquad (8)$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_\kappa \wedge \omega_j^{ik}, \qquad (9)$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_i \wedge \omega_\beta^{\alpha i}, \qquad (10)$$

$$D\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^i + \omega_\alpha \wedge \omega^i, \qquad (11)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i, \qquad (12)$$

где

$$\omega^{ij} = \Lambda^{\alpha j}\omega^i_\alpha, \quad \omega^{ik}_j = \Lambda^{\alpha k}_j\omega^i_\alpha + \delta^i_j(\omega^k - \Lambda^{\alpha k}\omega_\alpha) + \delta^k_j\omega^i, \tag{13}$$

$$\omega^{\alpha i}_\beta = -\Lambda^{\alpha i}_j\omega^j_\beta + \delta^\alpha_\beta(\omega^i - \Lambda^{\gamma i}\omega_\gamma) - \Lambda^{\alpha i}\omega_\beta .$$

Утверждение 2. *Уравнения* (6_1, *8—12*) *являются структурными уравнениями главного расслоения* $G_r(V_m)$, *базой которого служит многообразие* V_m, *а типовым слоем — подгруппа* G_r *стационарности гиперцентрированной плоскости* P^{m-1}_m, *причем* $r = n(n-m+1) + m^2$.

Расслоение $G_r(V_m)$ содержит 4 главных фактор-расслоения над той же базой V_m со следующими структурными уравнениями:

1) (6_1, 9) — расслоение плоскостных линейных кореперов $L_{m^2}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m^2} = GL(m)$ — линейной факторгруппой, действующей неэффективно во внутренней плоскости P_{m-1};

2) (6_1, 8, 9) — расслоение аффинных кореперов $L_{m(m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m(m+1)} = GA(m)$ — аффинной факторгруппой, действующей в гиперцентрированной плоскости P^{m-1}_m;

3) (6_1, 10) — расслоение нормальных линейных кореперов $L_{(n-m)^2}(V_m)$ с типовым слоем — линейной факторгруппой, действующей неэффективно в проективном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m-1} = P_n / P_m$;

4) (6_1, 10, 12) — расслоение центропроективных кореперов $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{(n-m)(n-m+1)}$ — центропроективной факторгруппой, действующей в проективном центрированном факторпространстве $\mathcal{P}^0_{n-m} = \mathcal{P}_{n-m} / \mathcal{P}_{n-m-1}$, где $\mathcal{P}_{n-m} = P_n / P_{m-1}$.

Продифференцируем внешним образом формы (6_2) с учетом уравнений (9, 12) и дифференциальных уравнений (7_2) на компоненты подобъекта $\{\Lambda_i^{\alpha j}\}$:

$$D\theta_i^j = \theta_i^k \wedge \theta_k^j + \omega_k \wedge \theta_i^{jk}, \tag{14}$$

где

$$\theta_i^{jk} = (\Lambda_i^{\alpha k}\omega_\alpha^j + \Lambda_i^{\alpha j}\omega_\alpha^k) + \delta_i^j(\omega^k - \Lambda^{\alpha k}\omega_\alpha) + \\ + \delta_i^k(\omega^j - \Lambda^{\alpha j}\omega_\alpha) - \Lambda_i^{\alpha jk}\omega_\alpha. \tag{15}$$

Так как $\theta_i^{[jk]} = 0$, то справедлива

Теорема. *Многообразие V_m является голономным* [4] *гладким многообразием.*

Замечание. *Произвольное семейство гиперцентрированных плоскостей рассмотрено в работе* [5]. *В общем случае нельзя показать, что оно является голономным многообразием.*

Зададим связность в главном расслоении линейных кореперов $l_{m^2}(V_m)$ со структурными уравнениями (6_1, 14), где $l_{m^2}(V_m) = Gl(m)$ — линейная группа, действующая в каждом касательном пространстве к многообразию V_m. Для этого введем формы

$$\tilde{\theta}_i^j = \theta_i^j - N_i^{jk}\omega_k. \tag{16}$$

Продифференцируем эти формы внешним образом с помощью уравнений (6_1, 14), затем заменим в полученных уравнениях формы θ_i^j на их выражения из (16). Сделаем обратную замену в тех слагаемых, в которых формы умножаются внешним образом на базисные формы, тогда

$$D\tilde{\theta}_i^j = \tilde{\theta}_i^k \wedge \tilde{\theta}_k^j - (\Delta N_{(i)}^{(j)(k)} + \theta_i^{jk}) \wedge \omega_k - N_i^{kl}N_k^{jm}\omega_l \wedge \omega_m. \tag{17}$$

Здесь дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta N_{(i)}^{(j)(k)} = dN_i^{jk} + N_i^{lk}\theta_l^j + N_i^{jl}\theta_l^k - N_l^{jk}\theta_i^l .$$

В соответствии с теоремой Картана — Лаптева [6] зададим связность в главном расслоении линейных кореперов с помощью поля объекта связности $N = \{N_i^{jk}\}$ на базе V_m уравнениями

$$\Delta N_{(i)}^{(j)(k)} + \theta_i^{jk} = N_i^{jkl}\omega_l . \tag{18}$$

Утверждение 3. *Объект коаффинной связности $N = \{N_i^{jk}\}$ является квазипсевдотензором.*

Подставляя (18) в (17), получим

$$D\tilde{\theta}_i^j = \tilde{\theta}_i^k \wedge \tilde{\theta}_k^j + K_i^{jkl}\omega_k \wedge \omega_l ,$$

где компоненты объекта кривизны $K = \{K_i^{jkl}\}$ выражаются по формулам

$$K_i^{jkl} = N_i^{j[kl]} - N_i^{m[k}N_m^{jl]} . \tag{19}$$

Подставляя в уравнения (6) формы связности $\tilde{\theta}_i^j$, получим

$$D\omega_i = \tilde{\theta}_i^j \wedge \omega_j + S_i^{jk}\omega_k \wedge \omega_j ,$$

где $S_i^{jk} = N_i^{[jk]}$ — компоненты объекта кручения.

С учетом симметрии форм θ_i^{jk} по верхним индексам, найдем дифференциальные сравнения

$$\Delta S_{(i)}^{(j)(k)} \equiv 0 \pmod{\omega_l} .$$

Утверждение 4. *Объект кручения S_i^{jk} коаффинной связности является псевдотензором* [1].

Продолжая уравнения (18), найдем сравнения

$$\Delta N_{(i)}^{(j)(k)(l)} + N_i^{mk}\theta_m^{jl} + N_i^{jm}\theta_m^{kl} - N_m^{jk}\theta_i^{ml} \equiv 0\,. \qquad (20)$$

Найдем дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны $K = \{K_i^{jkl}\}$. Для этого продифференцируем выражения (19) с учетом сравнений, полученных при альтернации по двум последним индексам из (18, 20). Получим

$$\Delta K_{(i)}^{(j)(k)(l)} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \omega_l)\,.$$

Утверждение 5. *Объект кривизны* K_i^{jkl} *коаффинной связности является псевдотензором* [1].

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащение центропроективных многообразий : учеб. пособие. Калининград, 2000.

2. *Вялова А.В.* Тензорность кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // Международная молодежная школа-семинар «Современная геометрия и ее приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и ее приложения» : сб. тр. Казань, 2017. С. 36—37.

3. *Вялова А.В.* Объект кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 59—66.

4. *Шевченко Ю.И.* Оснащение голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

5. *Башашина К.В.* Фундаментально-групповые связности и композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 19—28.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

A. V. Vyalova[1]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 36022, Russia
vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-6

Curvature and torsion pseudotensors of coaffine connection in tangent bundle of hypercentred planes manifold

Submitted on May 15, 2020

The hypercentered planes family, whose dimension coincides with dimension of generating plane, is considered in the projective space. Two principal fiber bundles arise over it. Typical fiber for one of them is the stationarity subgroup for hypercentered plane, for other — the linear group operating in each tangent space to the manifold. The latter bundle is called the principal bundle of linear coframes. The structural forms of two bundles are related by equations.

It is proved that hypercentered planes family is a holonomic smooth manifold.

In the principal bundle of linear coframes the coaffine connection is given. From the differential equations it follows that the coaffine connection object forms quasipseudotensor. It is proved that the curvature and torsion objects for the coaffine connection in the linear coframes bundle form pseudotensors.

Keywords: projective space, hypercentered planes family, coaffine connection, curvature pseudotensor, torsion pseudotensor.

References

1. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothing of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

2. *Vyalova, A. V.:* Tensority of curvature of fundamental-group connection, associated with congruence of hypercentered planes. International yonth school-seminar «Modern geometry and its applications». International scientific conference «Modern geometry and its applications». Kazan, 36—37 (2017).

3. *Vyalova, A. V.:* The curvature object for fundamental-group connection associated with congruence of hypercentred planes. DGMF. Kaliningrad. 49, 59—66 (2018).

4. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

5. *Bashashina, K. V.:* Fundamental-group connection andcomposite clothing for hypercentred planes family in projective space. DGMF. Kaliningrad. 49, 19—28 (2018).

6. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.*: Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).