УДК 514.75

О.М. Омельян
(Калининградский государственный университет)

ПОНЯТИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ И НЕРАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

В проективном пространстве P_n рассматривается неголономная поверхность или распределение плоскостей NS_n. Продемонстрировано два способа задания связности в расслоениях над разными базами – P_n и NS_n, приводящие к так называемым нераспределенной линейной связности и распределенной линейной связности. Дифференциальные уравнения объектов этих связностей отличаются, поэтому найдены инвариантные условия их совпадения. Показано, что объект кривизны распределенной связности в расслоении линейных реперов, принадлежащих плоскостям распределения, теряет тензорность и антисимметрию. Эту антисимметрию можно восстановить с помощью обобщенного альтернирования.

Проективное пространство P_n отнесем к подвижному реперу $\{A,A_I\}$ $(I,J,K = \overline{1,n})$ с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I;\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \tag{1}$$

и структурными уравнениями проективной группы GP(n)

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,\ D\omega_J^I = \omega_J \wedge \omega^I + \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K. \tag{2}$$

Рассмотрим неголономную поверхность NS_n или распределение 1-го рода [1; 2] m-мерных плоскостей P_m, т.е. через каждую точку пространства P_n проведем плоскость P_m. Получится n-мерное семейство NS_n центрированных m-плоскостей P_m^*. Осуществим разбиение значений индекса $I = (i,a)$ следующим образом: $i,j,k = \overline{1,m}$; $a,b,c = \overline{m+1,n}$. Произведем специализацию репера R, помещая вершины A и A_i в соответствующую плоскость P_m^*, причем A – в ее центр. Уравнения распределения NS_n в таком репере нулевого порядка имеют вид:

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J. \tag{3}$$

Продолжая уравнения (3), найдем

$$\Delta\Lambda^a_{iJ} - \delta^a_J\omega_i = \Lambda^a_{iJK}\omega^K \ \ (\Lambda^a_{i[JK]} = 0).$$

Подробнее:

$$\Delta\Lambda^a_{ij} = \tilde{\Lambda}^a_{ijK}\omega^K, \ \ \Delta\Lambda^a_{ib} - \Lambda^a_{ij}\omega^j_b - \delta^a_b\omega_i = \Lambda^a_{ibK}\omega^K, \tag{4}$$

где $\tilde{\Lambda}^a_{ijK} = \Lambda^a_{ijK} + \Lambda^a_{ib}\Lambda^b_{jK}$. Дифференциальный оператор Δ действует обычным образом: $\Delta\Lambda^a_{ij} = d\Lambda^a_{ij} + \Lambda^b_{ij}\omega^a_b - \Lambda^a_{ik}\omega^k_j - \Lambda^a_{kj}\omega^k_i$.

Над базой P_n со структурными уравнениями (2_1) построено [3; 4] главное расслоение $G(P_n)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности $G\square GP(n)$ центрированной плоскости $P^*_m = \{A, P_m\}$, где $A\square P_m$. Расслоение $G(P_n)$ содержит главное подрасслоение $L(P_n)$ с типовым слоем – линейной фактор-группой $L = GL(m)$ группы G.

Запишем выражение для внешнего дифференциала форм

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Im^i_{jK}\omega^K, \tag{5}$$

с помощью которых способом Лаптева [5,6] определяется объект так называемой нераспределенной линейной связности $\Im^i_{jK}$, соответствующий базе P_n со структурными формами ω^I:

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \omega^K \wedge (\Delta\Im^i_{jK} + \omega^i_{jK}) - \Im^k_{jK}\Im^i_{kL}\omega^K \wedge \omega^L; \tag{6}$$

$$\Delta\Im^i_{jK} = d\Im^i_{jK} + \Im^k_{jK}\omega^i_k - \Im^i_{kK}\omega^k_j - \Im^i_{jL}\omega^L_K, \ \ \omega^i_{jK} = \Lambda^a_{jK}\omega^i_a - \delta^i_j\omega_K - \delta^i_K\omega_j.$$

Из уравнений (6) следует, что компоненты объекта нераспределенной линейной связности удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Im^i_{jK} + \omega^i_{jK} = \Im^i_{jKL}\omega^L. \tag{7}$$

Запишем их в подробном виде:

$$\Delta\Im^i_{jk} + \omega^i_{jk} = (\Im^i_{jkL} + \Im^i_{ja}\Lambda^a_{kL})\omega^L, \ \Delta\Im^i_{ja} - \Im^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} = \Im^i_{jaK}\omega^K. \tag{8}$$

Рассмотрим вместо базы P_n расслоения $L(P_n)$ распределение NS_n, которое является базой той же размерности. В результате имеем главное расслоение $L(NS_n)$ с тем же типовым слоем. В этом расслоении зададим способом Лаптева объект так называемой распределенной связности $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$, который определим с помощью формы $\hat{\omega}$ с компонентами

$$\widehat{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k - \Gamma_{ja}^i \omega^a.$$

Выражение для внешнего дифференциала форм $\widehat{\omega}_j^i$, задающих распределенную связность, имеет вид

$$\begin{aligned} D\widehat{\omega}_j^i = \widehat{\omega}_j^k \wedge \widehat{\omega}_k^i + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i) + \omega^a \wedge (\Delta\Gamma_{ja}^i - \Gamma_{jk}^i \omega_a^k + \omega_{ja}^i) - \\ - \Gamma_{ja}^i \Lambda_{kl}^a \omega^k \wedge \omega^l - \Gamma_{jb}^i \Lambda_{ka}^b \omega^k \wedge \omega^a - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{lK}^i \omega^k \wedge \omega^K - \Gamma_{ja}^k \Gamma_{kK}^i \omega^a \wedge \omega^K. \end{aligned} \tag{9}$$

Из уравнений (9) видно, что компоненты объекта распределенной связности в силу теоремы Картана-Лаптева [5; 6] удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l + \Gamma_{jka}^i \omega^a, \;\; \Delta\Gamma_{ja}^i - \Gamma_{jk}^i \omega_a^k + \omega_{ja}^i = \Gamma_{jak}^i \omega^k + \Gamma_{jab}^i \omega^b. \tag{10}$$

Сопоставление уравнений (8_1) и (10_1) позволяет произвести отождествление

$$\Gamma_{jk}^i = \mathfrak{I}_{jk}^i, \Gamma_{jkl}^i = \mathfrak{I}_{jkl}^i + \mathfrak{I}_{ja}^i \Lambda_{kl}^a, \Gamma_{jka}^i = \mathfrak{I}_{jka}^i + \mathfrak{I}_{jb}^i \Lambda_{ka}^b, \tag{11}$$

а из уравнений (8_2) и (10_2) имеем

$$\Gamma_{ja}^i = \mathfrak{I}_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i = \mathfrak{I}_{jk}^i \; \Gamma_{jak}^i = \mathfrak{I}_{jak}^i, \Gamma_{jab}^i = \mathfrak{I}_{jab}^i. \tag{12}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения (8,10) показывают, что объект нераспределенной связности $\mathfrak{I}_{jK}^i = \{\mathfrak{I}_{jk}^i, \mathfrak{I}_{ja}^i\}$ совпадает с объектом распределенной связности $\{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i\}$, если выполняются условия (11; 12).

Продифференцируем уравнения (7) внешним образом. В результате получим сравнения на компоненты объекта $\mathfrak{I}_{jKL}^i$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathfrak{I}_{jKL}^i - \mathfrak{I}_{kK}^i \omega_{jL}^k + \mathfrak{I}_{jK}^k \omega_{kL}^i + \mathfrak{I}_{jL}^i \omega_K + \mathfrak{I}_{jK}^i \omega_L + \\ + \Lambda_{jKL}^a \omega_a^i + \Lambda_{jK}^a \omega_{aL}^i - \delta_K^i \omega_{jL} \equiv 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\omega_{jK} = \Lambda_{jK}^a \omega_a, \omega_{aJ}^i = -\delta_J^i \omega_a$. Учитывая действие оператора □, положим в сравнении (13) K = k, L = l, тогда

$$\begin{aligned} d\mathfrak{I}_{jkl}^i - \mathfrak{I}_{skl}^i \omega_j^s - \mathfrak{I}_{jJl}^i \omega_k^J - \mathfrak{I}_{jkJ}^i \omega_l^J + \mathfrak{I}_{jkl}^s \omega_s^i - \mathfrak{I}_{sk}^i \omega_{jl}^s + \mathfrak{I}_{jk}^s \omega_{sl}^i + \\ + \mathfrak{I}_{jl}^i \omega_k + \mathfrak{I}_{jk}^i \omega_l + \Lambda_{jkl}^a \omega_a^i + \Lambda_{jk}^a \omega_{al}^i - \delta_k^i \omega_{jl} \equiv 0. \end{aligned}$$

Преобразуя это с помощью оператора □ и используя уравнения неголономного распределения NS_n (3), получим

$$\Delta\mathfrak{I}^i_{jkl} - \mathfrak{I}^i_{sk}\omega^s_{jl} + \mathfrak{I}^s_{jk}\omega^i_{sl} + \mathfrak{I}^i_{jl}\omega_k + \mathfrak{I}^i_{jk}\omega_l + \Lambda^a_{jkl}\omega^i_a + \Lambda^a_{jk}\omega^i_{al} - \delta^i_k\omega_{jl} \equiv 0. \quad (14)$$

Аналогично, придавая значения индексам K = a, L = k; K = k, L = a; K = a, L = b, найдем

$$\Delta\mathfrak{I}^i_{jka} - \mathfrak{I}^i_{jkl}\omega^l_a - \mathfrak{I}^i_{lk}\omega^l_{ja} + \mathfrak{I}^l_{jk}\omega^i_{la} + \mathfrak{I}^i_{ja}\omega_k + \mathfrak{I}^i_{jk}\omega_a + \Lambda^b_{jka}\omega^i_b - \delta^i_k\omega_{ja} \equiv 0, \quad (15)$$

$$\Delta\mathfrak{I}^i_{jak} - \mathfrak{I}^i_{jlk}\omega^l_a - \mathfrak{I}^i_{la}\omega^l_{jk} + \mathfrak{I}^l_{ja}\omega^i_{lk} + \mathfrak{I}^i_{ja}\omega_k + \mathfrak{I}^i_{jk}\omega_a + \Lambda^b_{jak}\omega^i_b + \Lambda^b_{ja}\omega^i_{bk} \equiv 0, \quad (16)$$

$$\Delta\mathfrak{I}^i_{jab} - \mathfrak{I}^i_{jkb}\omega^k_a - \mathfrak{I}^i_{jak}\omega^k_b - \mathfrak{I}^i_{ka}\omega^k_{jb} + \mathfrak{I}^k_{ja}\omega^i_{kb} + \mathfrak{I}^i_{jb}\omega_a + \mathfrak{I}^i_{ja}\omega_b + \Lambda^c_{jab}\omega^i_c \equiv 0. \quad (17)$$

Продифференцировав уравнения (10) для объекта распределенной связности, получаем, что компоненты объекта $\{\Gamma^i_{jkl}, \Gamma^i_{jka}, \Gamma^i_{jak}, \Gamma^i_{jab}\}$ удовлетворяют сравнениям:

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{sk}\omega^s_{jl} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_{sl} - \Gamma^i_{js}\omega^s_{kl} + (\Lambda^a_{jkl} + \Lambda^a_{jb}\Lambda^b_{kl})\omega^i_a + \Lambda^a_{jk}\omega^i_{al} - \delta^i_k\omega_{jl} - \delta^i_j\omega_{kl} \equiv 0, \quad (18)$$

$$\Delta\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l_a - \Gamma^i_{lk}\omega^l_{ja} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_{la} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ka} + (\Lambda^b_{jka} + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka})\omega^i_b - \delta^i_k\omega_{ja} - \delta^i_j\omega_{ka} \equiv 0, \quad (19)$$

$$\Delta\Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jlk}\omega^l_a - \Gamma^i_{la}\omega^l_{jk} + \Gamma^l_{ja}\omega^i_{lk} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ak} - \Gamma^i_{jb}\omega^b_{ak} + \Lambda^b_{jak}\omega^i_b + \Lambda^b_{ja}\omega^i_{bk} \equiv 0, \quad (20)$$

$$\Delta\Gamma^i_{jab} - \Gamma^i_{jkb}\omega^k_a - \Gamma^i_{jak}\omega^k_b - \Gamma^i_{ka}\omega^k_{jb} + \Gamma^k_{ja}\omega^i_{kb} - \Gamma^i_{jc}\omega^c_{ab} + \Lambda^c_{jab}\omega^i_c \equiv 0, \quad (21)$$

где $\omega^a_{bJ} = -\Lambda^a_{iJ}\omega^i_b - \delta^a_b\omega_J - \delta^a_J\omega_b$.

Проверим инвариантность условий (11; 12). Для этого введем в рассмотрение объект M с компонентами

$$\begin{aligned} &M^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - \mathfrak{I}^i_{jkl} - \mathfrak{I}^i_{ja}\Lambda^a_{kl}, \ M^i_{jab} = \Gamma^i_{jab} - \mathfrak{I}^i_{jab}, \\ &M^i_{jka} = \Gamma^i_{jka} - \mathfrak{I}^i_{jka} - \mathfrak{I}^i_{jb}\Lambda^b_{ka}, \ M^i_{jak} = \Gamma^i_{jak} - \mathfrak{I}^i_{jak}. \end{aligned} \quad (22)$$

(22)

Найдем дифференциальные сравнения для компонент (22) этого объекта, используя дифференциальные сравнения (4; 8; 14 – 21) и учитывая, что $\Gamma^i_{jk} = \mathfrak{I}^i_{jk}, \Gamma^i_{ja} = \mathfrak{I}^i_{ja}$. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\Delta M^i_{jkl} \equiv 0, \ \Delta M^i_{jka} - M^i_{jkl}\omega^l_a \equiv 0, \\ &\Delta M^i_{jak} - M^i_{jlk}\omega^l_a \equiv 0, \ \Delta M^i_{jab} - M^i_{jak}\omega^k_b - M^i_{jkb}\omega^k_a \equiv 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из сравнений (23) видно, что объект M является тензором, а значит условия (11; 12) инвариантны. Таким образом, имеет место (23)

Теорема 1. *Инвариантные условия (11; 12) являются условиями совпадения объекта нераспределенной линейной связности* $\mathfrak{I}^i_{jK} = \{\mathfrak{I}^i_{jk}, \mathfrak{I}^i_{ja}\}$ *с объектом распределенной линейной связности* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$.

Сопоставляя дифференциальные сравнения (14; 15) для пфаффовых производных компонент объекта нераспределенной линейной подсвязности $\Im^i_{jk}$ с соответствующими сравнениями (18; 19) в случае распределенной подсвязности Γ^i_{jk}, видим, что они существенно отличаются. Значит, имеет место

Теорема 2. *В силу инвариантности условий (11) в общем случае, когда* $\Lambda^a_{iJ} \neq 0$, *справедливы неравенства* $\Gamma^i_{jkl} \neq \Im^i_{jkl}, \Gamma^i_{jka} \neq \Im^i_{jka}$.

Введем величины

$$L^i_{jka} = \Gamma^i_{jka} + \Gamma^i_{jak},\ L^{\ i}_{jka} = \Im^i_{jka} + \Im^i_{jak},$$

которые удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям:

$$\Delta L^i_{jka} - 2(\Gamma^i_{j(kl)}\omega^l_a + \Gamma^i_{jl}\omega^l_{(ka)} + \Gamma^i_{l(k}\omega^l_{ja)} - \Gamma^l_{j(k}\omega^i_{la)} - \Lambda^b_{j(ka)}\omega^i_b + \Lambda^b_{ja}\delta^i_k\omega_b) -$$
$$- \Gamma^i_{jb}\omega^b_{ak} - \delta^i_j\Lambda^b_{ka}\omega_b + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka}\omega^i_b \equiv 0,$$

$$\square L^{\ i}_{jka} - 2(\Im^i_{j(kl)}\omega^l_a + \Im^i_{l(k}\omega^l_{ja)} - \Im^l_{j(k}\omega^i_{la)} - \Im^i_{ja}\omega_k - \Im^i_{jk}\omega_a - \Lambda^b_{j(ka)}\omega^i_b + \delta^i_k\Lambda^b_{ja}\omega_b) \equiv 0,$$

где симметрирование выполняется по двум крайним индексам. Эти сравнения обосновывают в общем случае следующие неравенства:

$$\Gamma^i_{jka} \neq -\Gamma^i_{jak}, \Im^i_{jka} \neq -\Im^i_{jak}. \tag{24}$$

Вернемся к выражению (6) для внешнего дифференциала форм $\tilde{\omega}^i_j$, задающих объект нераспределенной связности. Учитывая уравнения (7), соберем слагаемые при произведении базисных форм $\omega^K \wedge \omega^L$. С учетом того, что индексы K, L принимают значения одной серии, внешние дифференциалы (6) запишем в виде

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \Re^i_{jKL}\omega^K \wedge \omega^L; \tag{25}$$

$$\Re^i_{jKL} = \Im^i_{j[KL]} - \Im^k_{j[K}\Im^i_{kL]}, \tag{26}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Из (26) видно, что компоненты объекта кривизны $\Re^i_{jKL}$ нераспределенной линейной связности $\Im^i_{jK}$ антисимметричны по двум последним индексам, т.е. $\Re^i_{jKL} = -\Re^i_{jLK}$. Дифференциальные сравнения для компонент объекта $\Re^i_{jKL}$ имеют вид $\Delta\Re^i_{jKL} \equiv 0$. Учи-

(27)

тывая действие оператора Δ и расписывая значения индексов K и L на две серии, получим:

$$\Delta\Re^i_{jkl} \equiv 0,\ \Delta\Re^i_{jka} - \Re^i_{jkl}\omega^l_a \equiv 0,\ \Delta\Re^i_{jak} - \Re^i_{jlk}\omega^l_a \equiv 0,$$
$$\Delta\Re^i_{jab} - \Re^i_{jkb}\omega^k_a - \Re^i_{jak}\omega^k_b \equiv 0. \qquad (27)$$

Из сравнений (27) видно, что объект кривизны $\Re = \{\Re^i_{jkl}, \Re^i_{jka}, \Re^i_{jak}, \Re^i_{jab}\}$ нераспределенной линейной связности $\Im^i_{jK}$ является тензором, содержащим один простейший подтензор $\Re^i_{jkl}$ и два простых $\{\Re^i_{jka}, \Re^i_{jkl}\}, \{\Re^i_{jak}, \Re^i_{jkl}\}$ подтензора, причем последние фактически совпадают.

Замечание. Если в сравнении (27_2) поменять местами индексы k и a, то не получится сравнение (27_3), но результаты альтернирования сравнений (27_2) и (27_3) по этим индексам разных серий совпадают.

Выражение (9) для внешнего дифференциала форм $\widehat{\omega}^i_j$, задающих распределенную связность, с учетом дифференциальных уравнений (10) и значений, которые принимает индекс K, имеет следующий вид:

$$D\widehat{\omega}^i_j = \widehat{\omega}^k_j \wedge \widehat{\omega}^i_k + \omega^k \wedge \Gamma^i_{jkl}\omega^l + \omega^k \wedge \Gamma^i_{jka}\omega^a + \omega^a \wedge \Gamma^i_{jak}\omega^k +$$
$$+ \omega^a \wedge \Gamma^i_{jab}\omega^b - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{kl}\omega^k \wedge \omega^l - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}\omega^k \wedge \omega^a - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl}\omega^k \wedge \omega^l -$$
$$- \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{la}\omega^k \wedge \omega^a - \Gamma^l_{ja}\Gamma^i_{lk}\omega^a \wedge \omega^k - \Gamma^k_{ja}\Gamma^i_{kb}\omega^a \wedge \omega^b.$$

Приведем в этом выражении подобные слагаемые, учитывая, что если пара последних индексов принимает значения одной серии, то ставится знак альтернации,

$$D\widehat{\omega}^i_j = \widehat{\omega}^k_j \wedge \widehat{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + R^i_{jka}\omega^k \wedge \omega^a + R^i_{jak}\omega^a \wedge \omega^k + R^i_{jab}\omega^a \wedge \omega^b; \qquad (28)$$

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]},\ R^i_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]}, \qquad (29_1)$$

$$R^i_{jka} = \Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{la},\ R^i_{jak} = \Gamma^i_{jak} - \Gamma^l_{ja}\Gamma^i_{lk}. \qquad (29_2)$$

Из формул (29_1) видно, что компоненты объекта кривизны R^i_{jkl} и R^i_{jab} антисимметричны по двум последним индексам, в то время как из формул (29_2) следует, что компоненты объекта кривизны R^i_{jka} и R^i_{jak} не являются антисимметричными. Таким образом, объект кри-

(30)

(30)

визны распределенной связности теряет антисимметрию по двум последним индексам. Дифференциальные уравнения для компонент объекта R = $\{R^i_{jkl}, R^i_{jka}, R^i_{jak}, R^i_{jab}\}$ имеют вид [4]

$$
\begin{gathered}
\Delta R^i_{jkl} - (\Gamma^i_{js}\Lambda^a_{[kl]} - \delta^i_s\Lambda^a_{[kl]} - \delta^i_s\Lambda^a_{jb}\Lambda^b_{[kl]})\omega^s_a - \delta^i_j\Lambda^a_{[kl]}\omega_a \equiv 0, \\
\Delta R^i_{jka} - (\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{kl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk})\omega^l_a - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ka} - \Gamma^i_{lk}\omega^l_{ja} - \Gamma^i_{la}\omega^l_{jk} + \\
+ (\Lambda^b_{jka} + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka})\omega^i_b - (\delta^i_j\Lambda^b_{ka} + \delta^i_k\Lambda^b_{ja})\omega_b \equiv 0, \\
\Delta R^i_{jak} - (\Gamma^i_{jlk} + \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{lk} - \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk})\omega^l_a - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ak} - \Gamma^i_{lk}\omega^l_{ja} - \Gamma^i_{la}\omega^l_{jk} - \\
- \Gamma^i_{jb}\omega^b_{ak} + \Lambda^b_{jak}\omega^i_b - \delta^i_k\Lambda^b_{ja}\omega_b \equiv 0, \\
\Delta R^i_{jab} + (\Gamma^i_{jk[a} + \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{k[a} - \Gamma^i_{jc}\Lambda^c_{k[a} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{l[a} - \Gamma^i_{j[ak} + \Gamma^l_{j[a}\Gamma^i_{lk})\omega^k_{b]} \equiv 0.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

При сопоставлении уравнений (27) и (30) мы видим, что дифференциальные сравнения для компонент объектов $\Re$ и R принципиально различны. Заметим, что при рассмотрении голономного распределения только сравнения (30_1) принимают тензорный вид $\Delta R^i_{jkl} \equiv 0,$ а все остальные сравнения (30) остаются неизменными.

Вернемся к выражению (28) для внешнего дифференциала форм $\widehat{\omega}^i_j$. В этом выражении можно привести подобные слагаемые, если ввести знак обобщенного альтернирования “ $\bar{[}\ \bar{]}$ ”, когда действие производится не над одним объектом, а берется полуразность двух разных объектов. С учетом соотношений (24; 29_2) имеем

$$
\begin{gathered}
\widehat{R}^i_{jka} = R^i_{j\bar{[}ka\bar{]}} = \frac{1}{2}(R^i_{jka} - R^i_{jak}) = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{la} - \Gamma^i_{jak} + \Gamma^l_{ja}\Gamma^i_{lk}) = \\
= \Gamma^i_{j\bar{[}ka\bar{]}} - \Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, структурные уравнения (28) упрощаются:

$$
D\widehat{\omega}^i_j = \widehat{\omega}^k_j \wedge \widehat{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + R^i_{jab}\omega^a \wedge \omega^b + 2\widehat{R}^i_{jka}\omega^k \wedge \omega^a,
$$

причем дифференциальные сравнения на компоненты $\widehat{R}^i_{jka}$ имеют следующий вид:

$$
\Delta\widehat{R}^i_{jka} - R^i_{jkl}\omega^l_a - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{[ka]} + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka}\omega^i_b - \delta^i_j\Lambda^b_{ka}\omega_b + \Gamma^i_{jb}\omega^b_{ak} \equiv 0. \tag{31}
$$

Из сравнений (31) видно, что подобъект $\{\widehat{R}^i_{jka}, R^i_{jkl}\}$ в отличие от подобъекта $\{\Re^i_{jka}, \Re^i_{jkl}\}$ не является тензором.

Вывод. Задание связности способом Лаптева в расслоениях с одним типовым слоем над разными базами одинаковой размерности приводит к двум разным связностям – распределенной и нераспределенной. Если объекты этих связностей еще можно отождествить, то их объекты кривизны существенно отличаются. Объект кривизны распределенной связности теряет тензорный характер и антисимметрию по двум последним индексам.

Список литературы

1. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С. 71 – 120.

2. *Шевченко Ю.И.* Две проективные связности на неголономной поверхности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. Вып. 30. С. 102 – 112.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2002. 112 с.

4. *Омельян О.М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 74 – 78.

5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5 – 247.

6. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139 – 189.

O. Omelyan

THE NOTIONS OF DISTRIBUTED AND NON- DISTRIBUTED CONNECTIONS

In the projective space P_n non-holonomic surface or distribution of planes NS_n is considered. It is displayed two methods of assignment of the connection in the bundles over different bases – P_n and NS_n, leading to so called the non-distributed linear connection and to so called the distributed linear connection. Differential equations of these connections objects are distinguished, therefor the invariant conditions of their coincidence are found. It is shown, that the curvature object of the distributed connection in the bundle of linear frames, belonging to planes of the distributon, loses tensority and antisymmetry. This antisymmetry we may restore by means of generalized alternation.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб КЦФЕ), дипломный проект. М03-2.1Д-94.