Т е о р е м а 5. Двойная линия отображения f является характеристической линией отображения f тогда и только тогда, когда эта линия является характеристической линией гиперсферического изображения S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тензор h^k_{ij} и тензор деформации t^k_{ij} гиперсферического изображения S в рассматриваемом случае связаны равенством:

$$2d\lambda\cdot t^k_j\omega^j + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s + \lambda t^k_s) h^s_{ij}\omega^i\omega^j.$$

Пусть $\gamma \subset V_{n-1}$ является двойной и характеристической линией отображения f одновременно. С учетом равенства (3) последняя формула запишется в виде:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\cdot h^s_{ij}\omega^i\omega^j, \qquad (5)$$

откуда по формуле (4) получим:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \theta\omega^k + \lambda\cdot\theta\cdot m\omega^k,$$

следовательно, $t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \xi\omega^k$, где $\xi = \frac{1}{\lambda}\cdot(\theta+\lambda\cdot\theta\cdot m - 2d\lambda\cdot m)$.

Таким образом, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является характеристической линией гиперсферического изображения S.

Пусть теперь $\gamma \subset V_{n-1}$ является двойной линией отображения f и характеристической линией гиперсферического изображения S. Тогда имеют место равенства $t^k_{ij}\omega^i\omega^j=\xi\omega^k$ и формулы (3).

Рассмотрим форму $\theta = \frac{\xi\cdot\lambda+2d\lambda\cdot m}{1+\lambda\cdot m}$ (можно показать, что $1+\lambda m\neq 0$), откуда $\xi = \frac{1}{\lambda}\cdot(\theta+\theta\cdot\lambda m - 2d\lambda\cdot m)$.

Итак, равенство $t^k_{ij}\omega^i\omega^j=\xi\omega^k$ запишется в виде $\lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\theta+\theta\cdot\lambda m - 2d\lambda\cdot m)\,\omega^k$ или $2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \theta(\omega^k+\lambda m\cdot\omega^k)$.
Используя формулу (3), последнее равенство запишем в виде:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\,\omega^s\theta.$$

Заметим, что левые части полученного равенства и равенства (5) совпадают, следовательно, их правые части также совпадают:

$$(\delta^k_s+\lambda t^k_s)\,h^s_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\,\omega^s\theta.$$

Можно показать, что матрица $\|\delta^k_s+\lambda t^k_s\|$ невырожденная. Тогда из последнего равенства следует, что $h^k_{ij}\omega^i\omega^j=\theta\omega^k$. Таким образом, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является характеристической линией отображения f.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I9 1988

УДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ КОНИК

Е.В.С к р ы д л о в а

(Калининградский университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные [I] конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$, порожденные парой коник C_1 и C_2, касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, в которых коника C_1 описывает однопараметрическое семейство, а коника C_2 -конгруэнцию. Решена задача расслоения от конгруэнции коник C_2 к ассоциированной прямолинейной конгруэнции. Выделен и геометрически охарактеризован один из частных классов таких конгруэнций.

Проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta,$$

где ω^β_α -линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma$$

и условию эквипроективности

$$\omega^0_0 + \omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0.$$

Вершины A_0 и A_3 репера совместим с точками касания коник C_1 и C_2 соответственно с прямой ℓ, вершины A_i ($i=1,2$) расположим на кониках C_i так, чтобы A_1 была полярно сопряжена точке A_3 относительно коники C_1, а A_2 была полярно сопряжена точке A_0 относительно коники C_2. Относительно такого репера уравнения коник C_1 и C_2 запишутся соответственно в виде:

$$\begin{cases}(x^3)^2-2x^0x^1=0,\\ x^2=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}(x^0)^2-2x^2x^3=0,\\ x^1=0.\end{cases}$$

Так как коника C_1 описывает однопараметрическое семейство, а коника C_2 - конгруэнцию, то

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^1, \omega_1^0, \omega_0^0+\omega_1^1-2\omega_3^3, \omega_3^1-\omega_0^3, \omega_3^0-\omega_1^3, \omega_0^2, \omega_1^2, \omega_3^2\}=1, \qquad (1)$$

$$\operatorname{rang}\{\omega_3^2, \omega_2^3, \omega_3^3+\omega_2^2-2\omega_0^0, \omega_0^2-\omega_3^0, \omega_0^3-\omega_2^0, \omega_3^1, \omega_2^1, \omega_0^1\}=2, \qquad (2)$$

где в скобках выписаны структурные формы каждой из коник.

Рассмотрим условия расслоения от конгруэнции коник C_2 к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3). Они имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_3^0\wedge\omega_0^2+\omega_3^1\wedge\omega_1^2=0, \quad \omega_2^0\wedge\omega_0^3+\omega_2^1\wedge\omega_1^3=0, \\ (\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0)\wedge\omega_0^2-\omega_3^2\wedge\omega_0^3=0, \quad \omega_2^3\wedge\omega_0^3=0, \\ (\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0)\wedge\omega_0^3-\omega_2^3\wedge\omega_0^2-2\omega_0^1\wedge\omega_1^3=0, \\ \omega_2^0\wedge\omega_0^2+\omega_2^1\wedge\omega_1^2-\omega_3^0\wedge\omega_0^3-\omega_3^1\wedge\omega_1^3-2\omega_0^3\wedge\omega_0^2=0, \end{cases} \qquad (3)$$

причем

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^2, \omega_1^3\}=2. \qquad (4)$$

Учитывая равенство (4), выберем в качестве базисных формы Пфаффа $\omega_0^3 \overset{def}{=} \theta_1$ и $\omega_1^3 \overset{def}{=} \theta_2$. Тогда с учетом условий (1), (3) система уравнений Пфаффа расслояемых конгруэнций $(C_1, C_2)_{1,2}$ принимает вид:

$$\begin{cases} \omega_0^1=\beta\theta_1+\gamma\theta_2, \ \omega_0^2=\gamma\Gamma_1^2\theta_1+m\theta_2, \quad \omega_1^0=p\omega_0^1, \ \omega_1^2=\Gamma_1^2\omega_0^1, \\ \omega_2^0=a\theta_1+b\theta_2, \ \omega_2^1=b\theta_1+c\theta_2, \quad \omega_2^3=\Gamma_2^3\theta_1, \ \omega_3^0=\Gamma_3^0\omega_0^1+\theta_2, \\ \omega_3^1=\Gamma_3^1\omega_0^1+\theta_2, \ \omega_3^2=-\alpha\omega_0^2+k\theta_1-2\beta\gamma\Gamma_1^2\theta_2, \\ \omega_0^0+\omega_1^1-2\omega_3^3=g\omega_0^1, \ \omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0=\alpha\theta_1-2\beta\theta_2-\Gamma_2^3\omega_0^2, \ \omega_0^1\neq 0, \end{cases} \qquad (5)$$

причем выполняются конечные соотношения

$$\begin{cases} am-\Gamma_1^2 c\beta+\gamma\Gamma_3^0-\beta\Gamma_3^1-2m=0, \\ km+2\beta\gamma^2(\Gamma_1^2)^2=0, \quad \beta m-\gamma^2\Gamma_1^2=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Исследуя систему уравнений (5), (6), убеждаемся, что существует два класса расслояемых конгруэнций $(C_1, C_2)_{1,2}$. Конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}^{I}$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\begin{cases} \omega_0^1=\beta\theta_1, \ \omega_0^2=0, \ \omega_1^0=p\omega_0^1, \ \omega_1^2=\Gamma_1^2\omega_0^1, \ \omega_2^0=a\theta_1+b\theta_2, \\ \omega_2^1=b\theta_1+c\theta_2, \ \omega_2^3=\Gamma_2^3\theta_1, \ \omega_3^0=\Gamma_3^0\omega_0^1+\theta_2, \ \omega_3^1=-c\omega_1^2+\theta_1, \\ \omega_3^2=k\theta_1, \ \omega_0^0+\omega_1^1-2\omega_3^3=g\omega_0^1, \ \omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0=\alpha\theta_1-2\beta\theta_2 \end{cases} \qquad (7)$$

и существуют с произволом одиннадцати функций одного аргумента.

Конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}^{II}$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \omega_0^1=\beta\theta_1+\gamma\theta_2, \ \omega_0^2=\omega_1^2=\omega_3^2=0, \ \omega_1^0=p\omega_0^1, \ \omega_2^0=a\theta_1+b\theta_2, \\ \omega_2^1=b\theta_1+c\theta_2, \ \omega_2^3=\Gamma_2^3\theta_1, \ \omega_3^0=\Gamma_3^0\omega_0^1+\theta_2, \ \omega_3^1=\Gamma_3^1\omega_0^1+\theta_1, \\ \omega_0^0-\omega_1^1-2\omega_3^3=g\omega_0^1, \ \omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0=\alpha\theta_1-2\beta\theta_2, \ \gamma\Gamma_3^0-\beta\Gamma_3^1=0 \end{cases} \qquad (8)$$

и существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Для конгруэнций $(C_1,C_2)_{1,2}^{I}$ и $(C_1,C_2)_{1,2}^{II}$ доказаны следующие свойства.

1. Вершина A_3 является фокусом коники C_2, описывающей конгруэнцию.

2. Прямолинейная конгруэнция (A_2A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_0A_1).

3. Конгруэнция (A_0A_1), ассоциированная с конгруэнциями $(C_1C_2)_{1,2}^{I}$, является параболической.

4. В конгруэнциях $(C_1C_2)_{1,2}^{II}$ все коники C_1 принадлежат одной и той же неподвижной плоскости.

Выделим подкласс K конгруэнций $(C_1,C_2)_{1,2}^{II}$, в котором асимптотические линии на поверхности (A_2) огибаются прямыми A_0A_2 и A_1A_2, а точка A_0 описывает линию. Система уравнений Пфаффа конгруэнций K имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^1=\gamma\theta_2, \ \omega_0^2=\omega_1^0=\omega_1^2=0, \ \omega_2^0=\ell\theta_2, \ \omega_2^1=b\theta_1, \ \omega_2^3=0, \\ db+b(\omega_0^0+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3)=0, \ \omega_3^0=\theta_2, \ \omega_3^1=\theta_1+t\theta_2, \\ \omega_3^2=0, \ \omega_0^0+\omega_1^1-2\omega_3^3=f\theta_2, \quad \omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_0^0=\alpha\theta_1. \end{cases} \qquad (9)$$

Конгруэнции K существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Для конгруэнций K справедливы следующие свойства:

1. Прямолинейные конгруэнции (A_0A_2) и (A_2A_3) являются параболическими.

2. Фокус прямолинейной конгруэнции (A_2A_3) описывает линию.

3. Вершина A_2 является фокусом коники C_2, описывающей конгруэнцию.

4. Квадрика Ли поверхности (A_2), построенная в точке A_2, содержит конику C_1, соответствующую этой точке.

5. Семейство квадрик Ли поверхности (A_2) является однопараметрическим.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т, Калининград, 1973. Вып. 3. С. 41–49.