Если $\det \| a_{\alpha\alpha} \| \neq 0$,то вторая поляра имеет единственный центр.Так как $a_{\overline{\alpha}\overline{\alpha}} \neq 0$ и $a_{p+1 0} \neq 0$,то всегда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} , a_{p+1 0} \| = n-p .$$

Если $\det \| a_{\alpha\alpha} \| = 0$,то тогда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} \| \neq \operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} , a_{p+1 0} \| ,$$

т. е. вторая поляра не имеет центра.Ясно,что случая,когда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} \| = \operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} , a_{p+1 0} \| = r ,$$

где $r < n-p$,быть не может,т.е.вторая поляра не может иметь $(p-r)$ -плоскость центров.

Если вторая поляра имеет центр,то она будет вырожденной, если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha 0} \\ a_{\alpha 0} & a_{00} \end{vmatrix} = 0 .$$

Вычисляя определитель δ ,получим

$$\delta = a_{nn} \, a_{n-1 \, n-1} \cdots a_{p+2 \, p+2} \, (a_{p+1 \, p+1} \, a_{00} - a^2_{p+1 0}) . \qquad (3)$$

Так как $a_{\overline{\alpha}\overline{\alpha}} \neq 0$,то $\delta = 0$,если

$$a_{p+1 \, p+1} \, a_{00} - a^2_{p+1 0} = 0 . \qquad (4)$$

Если вторая поляра не имеет центра,то из (3),учитывая,что $a_{p+1 0} \neq 0$,следует,что вторая поляра не может быть нецентральной вырожденной.Из выше изложенного вытекает следующий вывод.

Если средняя нормаль поверхности $V_p \subset E_n$ имеет главное направление относительно второй поляры точки $x \in V_p$,то вторая поляра этой точки может быть немнимой центральной как вырожденной (выполнено условие (4)),так и невырожденной,а также нецентральной невырожденной квадрикой.

Если вторая поляра - центральная,то справедлива

Т е о р е м а 4. Средняя нормаль $(x, \vec{M})$ поверхности V_p в точке $x \in V_p$ проходит через центр второй поляры этой точки (когда вторая поляра центральная) тогда и только тогда,когда ее направление является главным для второй поляры.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве //Лит.мат.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.475-491.

2.Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р-поверхности евклидова пространства//Сиб.матем. журн. 1966.Т.7.§3.С.499-511.

3.Е с и н В.А. О поверхностях коразмерности два//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им В.И.Ленина. М.,1981.С.40-44.

4.Е ф р о с П.П. О поверхностях коразмерности три//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им.В.И.Ленина. М.,1986.С.26-30.

УДК 514.75

О НОРМАЛЬНО ОСНАЩАЮЩИХ ПОЛЯХ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ КВАТЕРНИОННОЙ И ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Е.В.Опольская ,Р.Ф.Домбровский
(Черновицкий ун-т)

В настоящей статье развиваются некоторые тезисы докладов, сделанных авторами на Всесоюзной геометрической конференции в Кишиневе [7],[8].

I.Пусть $M_{2n}(\varphi,\psi)$ -вещественное многообразие почти кватернионной структуры (φ,ψ) ,определенной полями аффиноров φ и ψ . Если $T_x(M_{2n})$ слой касательного расслоения над M_{2n} ,соответствующий точке $x \in M_{2n}$, и $T^*_x(M_{2n})$-сопряженное ему пространство,то φ, ψ и $\varphi \circ \psi$ принадлежат пространству $T_x(M_{2n}) \otimes T^*_x(M_{2n})$ и удовлетворяют соотношениям $\varphi^2 = -\underline{I}$, $\psi^2 = -\underline{I}$, $\varphi \circ \psi = -\psi \circ \varphi$.

Рассмотрим подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ многообразия $M_{2n}(\varphi,\psi)$ такое, что слои касательного расслоения $T\mathfrak{M}_n = \bigcup_{x \in \mathfrak{M}_n} \Lambda_x$ имеют строение $\Lambda_x = \underset{x}{\Lambda}\varphi \otimes \underset{x}{\Lambda}\psi$, $\underset{x}{\Lambda}\varphi = \Lambda_x \cap \varphi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}\varphi = r$, $\underset{x}{\Lambda}\psi = \Lambda_x \cap \psi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}\psi = n-r$ для произвольного $x \in \mathfrak{M}_n$. Подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ существуют в многообразиях почти кватернионной структуры.Например, они существуют для тех многообразий $M_{2n}(\varphi,\psi)$,каждая точка x_0 которых допускает такую окрестность $\mathcal{U}_{x_0}$,что для произвольного $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ существует подпространство $V_x \subset T_x(M_{2n})$, $\dim V_x = n$, что $T_x(M_{2n}) = \varphi(V_x) \oplus \psi(V_x)$. $\underset{x}{\Lambda}\varphi$ и $\underset{x}{\Lambda}\psi$ - голоморфные касательные пространства подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ [3].Они на $\mathfrak{M}_n$ имеют постоянную размерность,следовательно, $\mathfrak{M}_n$ -родовое подмногообразие многообразия почти кватернионной структуры. Естественно определить понятия инвариантного, антиинвариантного, родового и др. подмногообразий многообразия почти кватернионной структуры $M_{2n}(\varphi,\psi)$ как соответственно инвариантного, антиинвариантного, родового и др. подмногообразий относительно каждой фундаментально оснащающей многообразие $M_{2n}(\varphi,\psi)$ почти комплексной структуры [1],[3].

Если $0<\tau<n$, то $\mathfrak{M}_n$ - f- подмногообразие многообразия почти кватернионной структуры (согласно определению Яно и Исихары [3]). Очевидно, что подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ не может быть инвариантным (голоморфным) подмногообразием многообразия почти кватернионной структуры.

Т е о р е м а I. На подмногообразии $\mathfrak{M}_n$ почти кватернионная структура объемлющего многообразия $M_{2n}(\varphi,\psi)$ индуцирует поле нормалей ν.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}_n$ -собственно родовое подмногообразие многообразия кватернионной структуры $M_{2n}(\varphi,\psi)$. Тогда $0<\tau<n$ и подпространства $\underset{x}{\Lambda}_\varphi$ и $\underset{x}{\Lambda}_\psi$ векторного пространства Λ_x не нулевые. Образы их $\varphi(\underset{x}{\Lambda}_\psi)$ и $\psi(\underset{x}{\Lambda}_\varphi)$ не имеют общих направлений (т.к. $\Lambda_x=\underset{x}{\Lambda}_\varphi\oplus\underset{x}{\Lambda}_\psi$) и являются подпространствами пространства $T_x R(M_{2n})$. Поле нормалей ν на $\mathfrak{M}_n$ определяется распределением элементов $\nu_x=\varphi(\underset{x}{\Lambda}_\psi)\cup\psi(\underset{x}{\Lambda}_\varphi)$. Если $\tau=0$, то $\mathfrak{M}_n$- ψ-инвариантное подмногообразие и тогда нормально оснащающим полем, индуцированным почти кватернионной структурой объемлющего многообразия, будет распределение $\varphi(\Lambda_x)$. При $\tau=n$ $\mathfrak{M}_n$ - φ-инвариантное подмногообразие и $\nu_x=\psi(\Lambda_x)$.

Т е о р е м а 2. Каждое собственно родовое подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ многообразия почти кватернионной структуры является многообразием $(f\xi\eta\varrho)$ -структуры [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из основной теоремы [1]. В силу "независимости" оснащающих многообразие почти кватернионной структуры почти комплексных структур φ и ψ на собственно родовом подмногообразии $\mathfrak{M}_n$ нормально оснащающее поле ν индуцирует две $(f\xi\eta\varrho)$ -структуры.

2. В многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ почти контактной структуры с линейной симметрической связностью, определенной объектом Γ^{J}_{KL} $(J,K,L,\ldots=1,\ldots,n+1)$, рассмотрим поверхность M_m типа 3 [6], заданную системой уравнений

$$\omega^J=\Lambda^J_i\,\theta^i\quad(i,j,\ldots=\overline{1,m}),$$

где θ^i -параметрические формы, ω^J -структурные формы дифференцируемого нечетномерного многообразия M_{n+1}, а функции Λ^J_i удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\Lambda^J_i-\Lambda^J_j\,\theta^j_i+\Lambda^K_i\,\omega^J_K=\Lambda^J_{ij}\,\theta^j.$$

Элемент η_x распределения η зададим относительно локального репера $\{\vec{e}_J\}$ параметрическими уравнениями

$$x^J=H^J_A\,u^A,$$

где u^A -независимые переменные (параметры), H^J_A -координаты векторов $\vec{H}_A$, определяющих элемент η_x, для которых выполнены условия инвариантности $\delta\vec{H}_A=\vartheta^B_A\vec{H}_B$ элемента.

Так как многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ оснащено различными полями геометрических объектов, на поверхности M_m естественным образом возникают поля аналитических объектов, которые являются ограничением на поверхность полей, оснащающих многообразие M_{n+1} [8]. Поля структурных объектов φ,ξ,η порождают на M_m следующие поля:

$$d\varphi^J_K-\varphi^J_L\,\omega^L_K+\varphi^L_K\,\omega^J_L=\hat{\varphi}^J_{Ki}\,\theta^i,$$
$$d\xi^J+\xi^K\omega^J_K=\hat{\xi}^J_i\,\theta^i,$$
$$d\eta_J-\eta_K\,\omega^K_J=\hat{\eta}_{Ji}\,\theta^i,$$

где $\hat{\varphi}^J_{Ki}=\varphi^J_{KL}\Lambda^L_i$, $\hat{\xi}^J_i=\xi^J_L\Lambda^L_i$, $\hat{\eta}_{Ji}=\eta_{JK}\Lambda^K_i$.

Для распределения η поле векторов

$$\vec{L}_{n+1}=\vec{e}_{n+1}+L^A_{n+1}\vec{e}_A,$$

где компоненты

$$L^A_{n+1}=-\overset{*}{H}{}^{AB}_{n+1}\,H^{n+1}_{B\,n+1},$$

будет нормально оснащающим [5].

Если в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ задать поле гиперквадрик, имеющих касание второго порядка с кривыми, принадлежащими соответствующему элементу распределения η [4] и проходящими через центр элемента η_x, то они в пересечении с η_x определяют в нем гиперконус второго порядка:

$$(\eta_{JK}+\eta_{KJ})\,H^J_A\,H^K_B\,u^A u^B=0.$$

Относительно этого конуса определяется подпространство, сопряженное касательной плоскости $T_x(M_m)$. Поле таких подпространств является η-виртуальным нормально оснащающим полем распределения $T(M_m)$. Ограничение на поверхности любого поля, нормально оснащающего распределение η, и построенное нами η-виртуальное поле определяют инвариантное нормально оснащающее поле поверхности M_m в $\mathring{M}_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Библиографический список

I. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1979.Т.9.247с.

2. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1975.Т.7.С.5-22.

3. Б а л а з ю к Т.Н., О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. IУ. Подмногообразия коразмерности I в многообразиях почти комплексной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1983.Т.15.С.127-164.

4. О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I//Тр.геометр. семинара/ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.49-94.

5. А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., 1974.Т.5.С.169-194.

6. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М., 1982.Т.13.С.77-117.

7. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. Об одном классе подмногообразий многообразия почти кватернионной структуры// IX Всесоюзн. геом.конф.:Тез.сообщ.Кишинев, 1988.С.101-102.

8. О п о л ь с к а я Е.В. О нормально- оснащающем поле поверхности типа III в многообразии почти контактной структуры// IX Всесоюз.геом.конф.:Тез.сообщ.Кишинев, 1988.С.231-232.

УДК 514.76

РАССЛОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ f-СТРУКТУРЫ

Н.Д.П о л я к о в

(Чувашский пед.ин-т)

I. Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Локальные координаты текущей точки x некоторой окрестности $U\subset M$ обозначим x^I $(I,J=1,\dots,n)$. Известно [1], что на M возникает бесконечная последовательность линейных дифференциальных форм $\omega^I, \omega^I_K, \dots$, симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру по базовым формам ω^I:

$$d\omega^I=\omega^J\wedge\omega^I_J,\qquad d\omega^I_K=\omega^J_K\wedge\omega^I_J+\omega^J\wedge\omega^I_{KJ},\ \dots, \tag{1}$$

формы $\bar{\omega}^I_J=\omega^I_J|_{\omega^K=0}$ образуют совокупность инвариантных форм группы Ли $\mathcal{D}^1_n$-группы, представленной как группа преобразований векторного репера $\vec{e}_I$ в касательной плоскости $T_x(M)$, т.е. $\delta\vec{e}_I=\bar{\omega}^J_I\vec{e}_J$.

Пусть на M задана f-структура ранга r со структурным объектом f: $f^3+f=0$. Ранг r постоянен на M и $0<r=2q<n$. Дифференциальные уравнения поля объекта $\{f^I_J\}$ имеют следующий вид:

$$df^I_J-f^I_K\omega^K_J+f^K_J\omega^I_K=f^I_{JK}\omega^K. \tag{2}$$

Известно, что f-структура ранга r на M порождает π-структуру, определенную распределениями линейных элементов η и ξ, причем в каждой точке $x\in M$ справедливо: 1) $\dim\eta_x=r$, $\dim\xi_x=n-r=m$; 2) $\operatorname{Im} f_x=\eta_x$, $\operatorname{Ker} f_x=\xi_x$. Пусть элемент распределения η натянут на r линейно независимых векторов $\vec{H}_i=H^I_i\vec{e}_I$ $(i,j,\dots=1,\dots,r)$, а элемент распределения ξ -на m линейно независимых векторов $\vec{V}_\alpha=\xi^I_\alpha\vec{e}_I$ $(\alpha,\beta,\dots=r+1,\dots,n)$. Охват компонент объектов $\{H^I_i\}$, $\{\xi^I_\alpha\}$ и их дифференциальные уравнения приведены в работе автора ([2], §I, п.3). Дифференциальные уравнения распределений η и ξ имеют соответственно вид:

$$dH^I_i-H^I_j\theta^j_i+H^J_i\omega^I_J=H^I_{iK}\omega^K, \tag{3}$$

$$d\xi^I_\alpha-\xi^I_\beta\vartheta^\beta_\alpha+\xi^J_\alpha\omega^I_J=\xi^I_{\alpha K}\omega^K. \tag{4}$$

Формы $\bar{\theta}^i_j=\theta^i_j|_{\omega^K=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(r,R)$ и $\delta\vec{H}_i=\bar{\theta}^j_i\vec{H}_j$, а формы $\bar{\vartheta}^\beta_\alpha=\vartheta^\beta_\alpha|_{\omega^K=0}$ -инвариантные формы группы $GL(m,R)$ и $\delta\vec{V}_\alpha=\bar{\vartheta}^\beta_\alpha\vec{V}_\beta$.