УДК 514.764.3

А. В. Христофорова
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Чебоксарский филиал

Двойственные проективные связности на оснащенной в смысле Картана гиперповерхности в пространстве аффинной связности

Найдены двойственные проективные связности, индуцируемые оснащением в смысле Э. Картана регулярной гиперповерхности, заданной в пространстве аффинной связности.

Ключевые слова: пространство аффинной связности, двойственность, проективные связности, регулярная гиперповерхность.

Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

В пространстве аффинной связности $A_{n,n}$, заданном системой форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1]

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T, D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

$$r^I_{(ST)} = 0, \quad r^I_{L(ST)} = 0, \quad \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0,$$

r^I_{ST} и r^I_{LST} — тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$, рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}. Гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в репере первого порядка имеет уравнение [1]

$\omega_0^n = 0$, последовательно продолжая которое получаем поля фундаментальных геометрических объектов второго $\{\Lambda_{kj}^n\}$, третьего $\{\Lambda_{kj}^n, \Lambda_{kjl}^n\}$ порядков и т. д.:

$$\omega_k^n = \Lambda_{kj}^n \omega_0^j ;$$

$$\nabla\Lambda_{kj}^n + \Lambda_{kj}^n \omega_0^0 = \Lambda_{kjl}^n \omega_0^l . \qquad (1)$$

Согласно [4], система форм Пфаффа $\omega_{\bar{J}}^{\bar{I}}$:

$$\omega_0^I = \theta^I,\ \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K,\ \omega_I^0 = 0,\ \omega_L^I = \theta_L^I - \frac{1}{n+1}\delta_L^I \theta_K^K$$

определяет расширенное пространство аффинной связности $\overset{*}{A}_{n,n}$ с тензором кривизны-кручения $\{R_{\bar{L}ST}^{\bar{I}}\}$.

Определение. *По Э. Картану [6], будем говорить, что регулярная гиперповерхность V_{n-1} в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ оснащена в смысле Э. Картана, если каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ в соответствующем слое $\overset{*}{A}_n$ расширенного пространства аффинной связности $\overset{*}{A}_{n,n}$ поставлена в соответствие точка N_n, $N_n(A_0) = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^0 A_0$, не принадлежащая касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$.*

Оснащение регулярной (то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0$) гиперповерхности V_{n-1} в смысле Э. Картана равносильно ее оснащению полями квазитензора ν_n^i и относительного инварианта ν_n^0 [5; 6]:

$$d\nu_n^i - \nu_n^i \omega_n^n + \nu_n^j \omega_j^i + \omega_n^i = \nu_{nk}^i \omega_0^k,\ d\nu_i^0 + \nu_i^0 \omega_0^0 - \nu_j^0 \omega_i^j = \nu_{ik}^0 \omega_0^k .$$

Согласно [6], рассматриваемое оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ индуцирует проективную связность; эта связность определяется [3] системой форм Пфаффа $\overset{1}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$:

$$\overset{1}{\omega}{}_0^i = \omega_0^i, \; \overset{1}{\omega}{}_i^j = \omega_i^j - \nu_n^j \omega_i^n, \; \overset{1}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0, \; \overset{1}{\omega}{}_i^0 = \omega_i^0 (=0) - \nu_n^0 \omega_i^n. \quad (2)$$

Формы (2) удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [2]

$$D\overset{1}{\omega}{}_{\bar{j}}^{\bar{i}} = \overset{1}{\omega}{}_{\bar{j}}^{\bar{k}} \wedge \overset{1}{\omega}{}_{\bar{k}}^{\bar{i}} + \frac{1}{2}\overset{1}{R}{}_{\bar{j}st}^{\bar{i}}\, \omega_0^s \wedge \omega_0^t,$$

$\overset{1}{R}{}_{\bar{j}st}^{\bar{i}}$ — тензор кривизны-кручения соответствующего пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ имеет строение

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}{}_{0st}^{i} &= R_{0st}^i - \nu_n^i R_{0st}^n, \\ \overset{1}{R}{}_{0st}^{0} &= R_{0st}^0 - \nu_n^0 R_{0st}^n, \\ \overset{1}{R}{}_{jst}^{0} &= 2(\Lambda_{l[s}^n \Lambda_{|j|t]}^n \nu_n^l \nu_n^0 + \Lambda_{j[s}^n \nu_{|n|t]}^0) - \nu_n^0 R_{jst}^n, \\ \overset{1}{R}{}_{jst}^{i} &= 2(\Lambda_{j[s}^n \nu_{|n|t]}^i + \nu_n^0 \Lambda_{j[s}^n \delta_{t]}^i + \nu_n^l \nu_n^i \Lambda_{l[s}^n \Lambda_{|j|t]}^n) + R_{jst}^i - \nu_n^i R_{jst}^n. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае вырождения пространства аффинной связности в аффинное $A_{n,n} \equiv A_n$ смещение оснащающей точки N_n имеет вид

$$dN_n = (\omega_n^n + \nu_n^i \omega_i^n) N_n + (\nu_{nk}^i \omega_0^k - \nu_n^k \omega_k^n \nu_n^i + \nu_n^0 \omega_0^i) A_i + \\ + (\nu_{nk}^0 \omega_0^k - \nu_n^i \nu_n^0 \omega_i^n) A_0,$$

откуда находим условие неподвижности точки N_n:

$$\nu^0_{nk} - \nu^0_n \nu^i_n \Lambda^n_{ik} = 0\,, \quad \nu^i_{nk} - \nu^i_n \nu^s_n \Lambda^n_{sk} + \delta^i_k \nu^0_n = 0\,. \qquad (4)$$

В случае $A_{n,n} \equiv A_n$ из соотношений (3), (4) следует, что если точка N_n неподвижна, то пространство $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ является плоским. Справедливо и обратное: если пространство проективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$, является плоским (то есть $\overset{1}{R}{}^{\bar{i}}_{jst} = 0$, см.: (3)), то из выражений (3) следует

$$\Lambda^n_{j[s}(\nu^0_{|n|t]} - \Lambda^n_{|l|t]}\nu^l_n \nu^0_n) = 0, \quad \Lambda^n_{j[s}(\nu^i_{|n|t]} + \nu^0_{|n|}\delta^i_{t]} - \Lambda^n_{|l|t}\nu^l_n \nu^i_n) = 0;$$

откуда в силу невырожденности тензора Λ^n_{js} $(\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda^n_{ij}\right| \neq 0)$ получим условие неподвижности оснащающей точки N_n (4).

Теорема 1. *Оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в смысле Э. Картана индуцирует пространство проективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$, определяемое системой форм Пфаффа (2). В случае $A_{n,n} \equiv A_n$ оснащающая точка N_n гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ неподвижна тогда и только тогда, когда пространство $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ является плоским.*

На оснащенной в смысле Э. Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} система n^2 форм Пфаффа $\overset{2}{\omega}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}$

$$\overset{2}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0, \ \overset{2}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0, \ \overset{2}{\omega}{}^j_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i + \frac{1}{n+1}\Lambda^{js}_n b^n_{sik}\omega^k_0,$$

$$\overset{2}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\omega}{}^0_i + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\Lambda^{ts}_n b_t + \nu^s_n\right) b^n_{sik}\omega^k_0, \qquad (5)$$

$$\left(\text{где } b_i \overset{def}{=} \Lambda^n_{ijk}\Lambda^{jk}_n, \ b^n_{ijk} \overset{def}{=} (n+1)\Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}b_{k)}\right) \qquad (6)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [2]:

$$D\overset{2}{\omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \overset{2}{\omega}{}^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \overset{2}{\omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2}\overset{2}{R}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}\,\omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \qquad (7)$$

следовательно, система форм $\overset{2}{\omega}{}^{\bar{j}}_{\bar{i}}$ определяет второе пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ с базой V_{n-1}.

В случае $A_{n,n} \equiv A_n$ в структурных уравнениях (7) компоненты тензора кривизны-кручения соответствующего пространства проективной связности $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ имеют следующее строение:

$$\overset{2}{R}{}^j_{0st} = 0, \ \overset{2}{R}{}^0_{0st} = 0,$$

$$\overset{2}{R}{}^j_{ist} = \overset{1}{R}{}^j_{ist} + 2\left[\frac{1}{(n+1)^2}\left(b_{[s}\delta^j_{t]}b_i + \Lambda^{jk}_n b_k b_{[s}\Lambda^i_{t]i}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n+1}\left(\Lambda^{jl}_n b_{l[s}\Lambda^n_{t]i} + b_{i[s}\delta^j_{t]}\right) - \frac{1}{n+1}\nu^l_n\left(b^n_{li[s}\delta^j_{t]} + b^n_{ki[s}\Lambda^n_{t]i}\Lambda^{jk}_n\right)\right],$$

$$\overset{2}{R}{}^0_{ist} = \overset{1}{R}{}^0_{ist} + \frac{b_l}{n+1}\left(\overset{2}{R}{}^l_{ist} - \overset{1}{R}{}^l_{ist}\right)+$$

$$+\frac{2}{(n+1)^2}\left[\Lambda^{kl}_n b_{k[s} b^n_{t]li} - \nu^l_n \left(b_l \Lambda^n_{i[s} b_{t]} + b_i \Lambda^n_{l[s} b_{t]}\right)\right]+$$

$$+\frac{2}{n+1}\left[\nu^l_n\left(\nu^k_n b^n_{kl[s}\Lambda^n_{t]i} - b_{l[s}\Lambda^n_{t]i} - b_{i[s}\Lambda^n_{t]l}\right)\nu^l_n - b^n_{li[s}\nu^l_{|n|t]}\right]+$$

$$+\frac{2}{(n+1)^3}\Lambda^{kl}_n\left(b_k b^n_{li[s} b_{t]} + \nu^j_n b^n_{jk[s} b^n_{t]li}\right).$$

Покажем, что преобразование I_K форм связности по закону (5) является инволютивным. Уравнения (1) в силу выражений (2), (5) можно переписать в следующих видах:

$$d\Lambda^n_{kj} + \Lambda^n_{kj}(\overset{1}{\omega}{}^0_0 + \omega^n_n) - \Lambda^n_{kl}\overset{1}{\omega}{}^l_j - \Lambda^n_{lj}\overset{1}{\omega}{}^l_k = \overset{1}{\Lambda}{}^n_{kjl}\,\omega^l_0,$$

$$d\Lambda^n_{kj} + \Lambda^n_{kj}(\overset{2}{\omega}{}^0_0 + \omega^n_n) - \Lambda^n_{kl}\overset{2}{\omega}{}^l_j - \Lambda^n_{lj}\overset{2}{\omega}{}^l_k = \overset{2}{\Lambda}{}^n_{kjl}\,\omega^l_0;$$

где

$$\overset{1}{\Lambda}{}^n_{kjl} = \Lambda^n_{kjl} + (\Lambda^n_{ks}\Lambda^n_{jl} + \Lambda^n_{sj}\Lambda^n_{il})\nu^s_n,\quad \overset{2}{\Lambda}{}^n_{kjl} = \overset{1}{\Lambda}{}^n_{kjl} - \frac{2}{n+1}b^n_{kjl}. \qquad (7)$$

Компоненты объектов квазинормалей

$$\overset{1}{b}_k \overset{def}{=} \Lambda^{ij}_n \overset{1}{\Lambda}{}^n_{kji},\ \overset{2}{b}_k \overset{def}{=} \Lambda^{ij}_n \overset{2}{\Lambda}{}^n_{kji}$$

в силу симметрии тензора Λ^n_{ij}, согласно (6), (7), имеют следующее строение:

$$\overset{1}{b}_k = b_k + n\Lambda^n_{kj}\nu^j_n,\ \overset{2}{b}_k = \overset{1}{b}_k\ . \qquad (8)$$

В силу уравнений (7), (8) тензоры

$$\overset{1}{b}{}^n_{ijk} \overset{def}{=} (n+1)\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\overset{1}{b}_{k)} + n\Lambda^n_{ij}\Lambda^n_{sk}\nu^s_n - (\Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{js} + \Lambda^n_{jk}\Lambda^n_{is})\nu^s_n,$$

$$\overset{2}{b}{}^n_{ijk} \overset{def}{=} (n+1)\overset{2}{\Lambda}{}^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\overset{2}{b}_{k)} + n\Lambda^n_{ij}\Lambda^n_{sk}\nu^s_n - (\Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{js} + \Lambda^n_{jk}\Lambda^n_{is})\nu^s_n$$

имеют вид

$$\overset{1}{b}{}^n_{ijk} = b^n_{ijk}, \overset{2}{b}{}^n_{ijk} = -\overset{1}{b}{}^n_{ijk}. \tag{9}$$

Теперь в силу соотношений (8), (9) формулы преобразования по закону (5) можно переписать в виде

$$\overset{2}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0,\ \overset{2}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0,\ \overset{2}{\omega}{}^j_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i + \frac{1}{n+1}\Lambda^{js}_n \overset{1}{b}{}^n_{sik}\,\omega^k_0,$$

$$\overset{2}{\omega}{}^0_i = \overset{1}{\omega}{}^0_i + \left(\frac{1}{(n+1)^2}\Lambda^{ts}_n \overset{1}{b}_t + \nu^s_n\right)\overset{1}{b}{}^n_{sik}\,\omega^k_0.$$

Из последних соотношений, согласно (8), (9), очевидно, что преобразование форм по закону (5) является инволютивным $I_K \equiv I_K^{-1}$, то есть пространства $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ являются двойственными [3]. Справедлива

Теорема 2. *Оснащение в смысле Э. Картана регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ кроме первой проективной связности (с формами связности (2)) в случае симметрии тензора Λ^n_{ij} индуцирует вторую проективную связность (с формами связности (5)), двойственную первой.*

Из соотношений (5) видно, что условием совпадения связностей пространств $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ является обращение в нуль тензора b^n_{ijk}. Если $A_{n,n} \equiv A_n$ (а следовательно, $\overset{*}{A}_{n,n} \equiv \overset{*}{A}_n$), то в силу выражения (6) и строения тензора Дарбу [7]:

$$D^n_{ijk} \overset{def}{=} \frac{n+1}{3}\Lambda^n_{(ijk)} - \Lambda^n_{(ij}b_{k)},$$

тензор b^n_{ijk} и тензор Дарбу совпадают, то есть $b^n_{ijk} = D^n_{ijk}$. Следовательно, согласно работе [2], справедлива

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием совпадения связностей двойственных пространств* $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ *и* $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$, *индуцируемых оснащением в смысле Э. Картана регулярной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_n$, *является вырождение этой гиперповерхности в гиперквадрику.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

3. *Столяров А.В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. 2005. №4. С. 21—27.

4. *Христофорова А.В.* Двойственная геометрия регулярной гиперповерхности в пространстве аффинной связности. Чебоксары, 2011.

5. *Cartan E.* Les éspaces a connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937. №4. С. 147—159.

A. Khristoforova

Dual projective connections on hypersurface equipped in the sense of Cartan in space of affine connection

In the work the dual projective connections induced by equipment in the sense of Cartan of regular hypersurface were found in space of affine connection.