Легко показать, что система (3.3) равносильна следующей:

$$\Gamma^i_{jk}\Lambda^j\Lambda^k = 2\lambda\Lambda^i. \qquad (4.4)$$

Из (4.I) – (4.4) вытекают следующие утверждения.

Т е о р е м а 4.2. Чтобы вектор Λ^i, касательный к гиперповерхности S в точке P_0, определял характеристическое направление отображения $f^S_{P_0}$, необходимо и достаточно, чтобы геодезическая связности Г.Врэнчану, определяющая это направление в точке P_0, имела в ней инфлексионную точку.

Т е о р е м а 4.3. Чтобы вектор Λ^i, касательный к гиперповерхности S в точке P_0, определял характеристическое направление отображения $f^S_{P_0}$, необходимо и достаточно, чтобы геодезические внутренних связностей 1-го и 2-го рода нормализованной гиперповерхности S, определяющие это направление, имели в точке P_0 геометрическое касание 2-го порядка.

§ 5. Поверхность, оснащенная аффинными нормалями

Пусть нормали N_P являются аффинными нормалями [4, с.247] гиперповерхности S. Это означает взаимность нормалей N_P и $\pi_P = T_P \cap P_n$ соответственно I-го и 2-го рода гиперповерхности. Так как взаимность нормализации характеризуется тем [4, с.234], что определяемая ею пара внутренних геометрий является чебышевской: $\theta_i = 0$, то, учитывая (2.5), приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 5.I. Нормали N_P гиперповерхности S являются аффинными нормалями в том и только в том случае, если локальная коллинеация Чеха соответствия f^S_P в каждой точке $P \in S$ является линейным отображением.

Следующее предложение вытекает из предыдущей теоремы и утверждения работы [4, с.248].

Т е о р е м а 5.2. Если локальная коллинеация Чеха соответствия f^S_P в каждой точке P гиперповерхности S является линейным отображением, то пара внутренних геометрий нормализованной поверхности S является эквиаффинной.

Библиографический список

1. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65-107.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных

соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия, 1970. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1971. С.153-174.

3. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1971. Вып.2. С.28-37.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

5. Ч е х Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I // Чехосл. матем. ж. 1952. V.2. № I. P.91-107.

6. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

7. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

8. Vranceanu G. Sul tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi / Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. №4. P.489-506.

УДК 514.77

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНО ПРАВИЛЬНЫХ СЕТЕЙ НА ПРОСТЕЙШИХ ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И.Б.Б а р с к и й

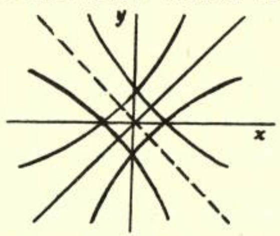
(Марийский педагогический институт)

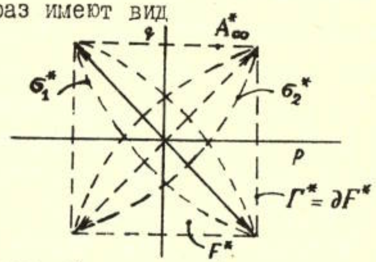
Главным объектом изучения является глобальное поведение сетей на двумерных регулярных поверхностях отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве с топологической точки зрения. С аналитической точки зрения дело сводится к исследованию дифференциальных уравнений [4]. При этом характеристики изображаются на поверхности асимтотическими линиями. Некоторые достаточные условия глобальной правильности сетей исследованы Э.Р.Розендорном и Б.Е.Кантором (см. например, [5] - [7]). Но естественно рассмотреть некоторые необходимые условия. При этом возникают вопросы: существует ли для характеристик двойная бесконечная точка; если сеть правильна в целом, то могут ли образы обоих семейств сходиться в особых точках границы образа поверхности и т.д. Всеми этими вопросами автор данной статьи продолжает заниматься. Но дать положительный ответ на последний вопрос уже можно, т.е. существует класс таких простейших поверхностей.

П р и м е р. Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$z = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - y\,\mathrm{arctg}\,y + \frac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

Асимптотическая сеть и ее образ имеют вид





Мы будем рассматривать простейшие гиперболические поверхности по А.Л.Вернеру [2], т.е. заданные по всей плоскости x, y и имеющие предельный конус односвязные регулярные поверхности вида $z = z(x,y)$, полные во внешнем смысле, неположительной кривизны со взаимно однозначным сферическим изображением и со следующими дополнительными условиями: гауссова кривизна $K<0$, поверхность взаимно однозначно проектируется на плоскость x, y ; $z_x^2 + z_y^2 < \infty$.

Как известно [2], замыкание сферического образа представляет собой в общем случае кривую, состоящую из четырех выпуклых кривых, обращенных выпуклостью внутрь, и имеющую четыре угловых точки [2], которые будем называть особыми. Вместо сферического изображения поверхности мы будем рассматривать нормальное изображение [1], которое каждой точке $X = (x,y,z(x,y)) \in F$ ставит в соответствие на декартовой плоскости p, q точку X^* с координатами

$$p(x,y) = z_x(x,y), \quad q(x,y) = z_y(x,y).$$

Правильность в целом сетей на поверхности F мы будем понимать по Н.В.Ефимову [3]. Через σ_1 обозначим линии первого семейства сети, а через σ_2 – линии второго семейства.

Т е о р е м а I. Если среди линий $\lambda_1^{\alpha *} \in \sigma_1^*$ существует λ_1^*, ограничивающая жорданову область $\mathcal{D}_1^*$, то сеть σ_1, σ_2 неправильна в целом.

Далее рассматриваем сети, линии которых обоими концами уходят в бесконечность, или более точно следуя Н.Ф.Ефимову, рассмотрим последовательность точек $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots (S_n < S_{n+1})$, где положение любой точки на λ определяется как длина дуги S от заранее фиксированной точки. Эту последовательность точек называем расходящейся, если $S_n \to L$ (где L – длина дуги, которая может быть и бесконечной). Так мы в дальнейшем будем иметь в виду именно такую расходящуюся последовательность точек, образы которых в F^* сходятся к точке $A^*_\infty \in \partial F^*$ в смысле топологии евклидовой плоскости p, q.

О п р е д е л е н и е. Двойной бесконечной точкой будем называть точку A^*_∞, к которой линия λ^* сходится обоими концами. Множество этих точек будем обозначать символом $\mathcal{T}^*_\infty$.

Т е о р е м а 2. Если существует линия сети λ_1^i, образ которой λ_1^{i*} сходится к двойной бесконечной точке A^*_∞ (будем обозначать этот факт символически: $\lambda_1^{i*} \to A^*_\infty \, (A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty)$), то существует бесконечно много линий $\lambda_1^{\alpha *}$, входящих в точку A^*_∞.

С л е д с т в и е. Линии первого семейства, о которых говорится в теореме 2, сплошь заполняют жорданову область, образованную $\mathcal{D}^* \cup A^*_\infty$ (где $\mathcal{D}^*$ – внутренняя область, ограниченная линией λ_1^*), и топологически сходятся к точке A^*_∞.

Т е о р е м а 3. Если существует линия первого семейства $\lambda_1^{i*} \in \sigma_1^* : \lambda_1^{i*} \to A^*_\infty \, (A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty)$, то необходимо любая линия второго семейства $\lambda_2^{i*} \in \sigma_2^*$ входит в точку A^*_∞ хотя бы одним концом.

С л е д с т в и е. Все линии второго семейства $\lambda_2^{\beta *}$ входят в точку A^*_∞.

Возникает вопрос, может ли сеть быть правильной в целом с одной только двойной бесконечной точкой вхождения? Положительный ответ можно дать, если привести соответствующий пример. Положительно решается вопрос и при существовании двух двойных бесконечных точек.

Т е о р е м а 4. Для правильной в целом сети не сущест-

4 Зак. 2036

вует трех двойных бесконечных точек.

Т е о р е м а 5. Не существует точек, принадлежащих множеству $\mathcal{T}^*_\infty$, для линий λ^*_2 второго семейства σ^*_2 внутри области $\mathcal{D}^*_1$, ограниченной линией первого семейства.

Возникает вопрос: может ли существовать одна двойная бесконечная точка для каких-либо линий первого и второго семейств одновременно? Если ответ положителен, то имеет место

С л е д с т в и е (из теоремы 5). При высказанном предположении линия второго семейства необходимо должна входить в точку A^*_∞ с внутренней и внешней сторон области, ограниченной кривой первого семейства.

Но ниже мы покажем, что такого варианта быть не может. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что такой вариант возможен. Тогда докажем пять лемм. На основании этих лемм и их следствий сформулируем окончательный результат в виде теоремы 6.

Л е м м а I. Если существует линия второго семейства λ^{k*}_2, для которой двойная бесконечная точка вхождения существует и является двойной бесконечной точкой линии первого семейства, то существует еще хотя бы одна линия второго семейства $\lambda^{\ell*}_2$, входящая в точку A^*_∞.

С л е д с т в и е. Существует бесчисленное множество линий второго семейства, о которых говорится в лемме I, входящих в точку A^*_∞ и топологически сходящихся к двойной бесконечной точке A^*_∞.

Л е м м а 2. Если для любой точки $x \in \lambda^{i*}_1$ существует ε-окрестность ($\varepsilon > 0$) и все линии второго семейства, входящие в эту окрестность, входят в точку A^*_∞ с внешней стороны области, ограниченной λ^{i*}_1, только справа, или только слева, то все линии второго семейства сплошь заполняют (пересекают) линию λ^{i*}_1 и входят в точку A^*_∞ или только справа, или только слева.

Л е м м а 3. Если линии $\lambda^{\alpha*}_2$ второго семейства сплошь заполняют линию λ^*_1 первого семейства, то не может быть вхождения в точку A^*_∞ с двух сторон со стороны внешней области, ограниченной линией λ^*_1.

Л е м м а 4. Если какая-либо линия первого или второго семейства имеют точку A^*_∞ – точкой, принадлежащей множеству $\mathcal{T}^*_\infty$, то хотя бы одним концом все линии первого или второго семейства входят в точку A^*_∞.

Л е м м а 5. Если для $\lambda^{i*}_1 \in \sigma^*_1$ точка $A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$ и множество $\{\lambda^{\alpha*}_2\}$ сплошь заполняет λ^{i*}_1; кроме того, если для любой линии $\lambda^{\alpha*}_2 \in \{\lambda^{\alpha*}_2\}$ точка $A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$, то множество линий первого семейства $\{\lambda^{\beta*}_1\}$, для которых точка $A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$, сплошь заполняет область F^* (образ поверхности F).

С л е д с т в и е 1. Для первого семейства существует единственная точка A^*_∞.

С л е д с т в и е 2. Так как мы рассматриваем регулярные кривые, то при топологическом приближении линий $\{\lambda^*_1\}$ первого семейства к границе Γ^* линии этого семейства должны описывать характер границы, т.е. попадать в сколь угодно малую ε-зону вдоль границы, которой принадлежит точка A^*_∞. Поэтому, если точка A^*_∞ – регулярная, то и касательные линии первого семейства, приближающиеся к границе в окрестности точки A^*_∞, должны стремиться к направлению касательной в точке A^*_∞ (соответственно, с каждой стороны линии).

С л е д с т в и е 3. Если точка A^*_∞ не регулярная (типа острия), то и характер линии первого семейства, приближающейся к границе, в окрестности точки A^*_∞ должен быть таким же (соответственно, приближаясь с обеих сторон).

С л е д с т в и е 4. В обоих случаях, описанных в следствиях 2 и 3, найдется хоть одна линия второго семейства (в ε-окрестности точки A^*_∞) и хоть одна линия первого семейства (в ε-зоне границы Γ^*), что линия второго семейства полностью будет содержаться во внутренней области, ограниченной линией первого семейства.

Т е о р е м а 6. Если линии первого семейства сети входят в точку A^*_∞ обоими концами ($A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$) и сплошь заполняют область F^*, то все линии второго семейства входят в точку A^*_∞ только одним концом.

Леммы I-5 и теорема 6 дают ответ на поставленный выше вопрос.

Т е о р е м а 7. Если для линий первого семейства существуют две точки вхождения $A^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$ и $B^*_\infty \in \mathcal{T}^*_\infty$, то второе семейство ведет себя единственно возможным образом, а именно, входит в эти точки.

В дальнейшем автором будут изучаться асимптотические сети (глобальное их поведение на простейших поверхностях), связь их с двойными бесконечными точками, с бесконечными точками вхождения одними концами каждого из семейств и связь с особыми точками образа поверхности.

Библиграфический список

I. Б а к е л ь м а н И.Я. К теории уравнений Монжа Ампера // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех. 1958. № I. С.25-38.

2. В е р н е р А.Л. О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны // Мат. сб. 1968. Т.75. № I. С.II2-I39.

3. Е ф и м о в Н.В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. 1964. Т.64. № 2. С.286-320.

4. Е ф и м о в Н.В. Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук. 1966. Т.2I. № 5. С.3-58.

5. К а н т о р Б.Е. Правильность в целом сетей на плоскости // Геометрия / ЛГПИ. Л., 1975. Вып.3. С.4I-5I.

6. Р о з е н д о р н Э.Р. Достаточные условия глобальной правильности сети кривых на евклидовой плоскости // Мат. сб. 1975. Т.96. № I. С.II8-I34.

7. Р о з е н д о р н Э.Р. Сети линий, зависящие от параметра, и достаточные условия их сходимости // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1990. Т.22. С.3-36.

УДК 5I4.75

О ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЯХ $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С.Ю.В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

Для $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределений [1] , [2] во второй дифференциальной окрестности рассмотрен двойственный образ в смысле А.В.Столярова [3] , [4]. Для внутренних проективных связностей γ, η, ϑ , ассоциированных с $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$ -распределением, найдены двойственные относительно инволютивного преобразования $\mathcal{J}$

$\mathcal{J}$ (I.I) проективные связности $\bar\gamma$, $\bar\eta$, $\bar\vartheta$. Доказано, что к $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределению в дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ его образующего элемента внутренним инвариантным образом присоединяются пространства проективной связности $\bar P_{n,r}$; $\bar P_{n,\ell}$; $\bar P_{n,n-m-1}$, двойственные соответственно пространствам проективной связности $P_{n,r}$; $P_{n,\ell}$; $P_{n,n-m-1}$.

Во всей работе используются символы и обозначения работ [1] , [2] , а также следующая схема индексов:

$$\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots=\overline{1,n};\ \ \bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\bar{\mathcal{L}},\ldots=\overline{0,n};\ \ p,q,s,t=\overline{1,r};\ \ i,j,k,\ell=\overline{r+1,m};$$
$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ \ u,v,w=\overline{r+1,n-1};\ \ \rho,\sigma,\tau=\overline{1,n-1};\ \ a,b,c,d=(\overline{1,m};n);$$
$$\hat p,\hat q,\hat s,\hat t=(\overline{1,r};n);\ \ \hat i,\hat j,\hat k,\hat\ell=(\overline{r+1,m};n);\ \ \hat a,\hat b,\hat c,\hat d=(\overline{1,m};n);\ \ \hat u,\hat v,\hat w=\overline{r+1,n};$$
$$\hat A,\hat B,\hat C=(\overline{1,r};\overline{m+1,n-1};n),\ \ \bar p,\bar q,\bar s=\overline{0,r};\ \ \bar i,\bar j,\bar k=(0;\overline{r+1,m});\ \bar\alpha,\bar\beta,\bar\gamma=(0;\overline{m+1,n-1}).$$

§ I. Двойственный образ $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$ -распределения

При изучении регулярных $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределений проективного пространства применим математический аппарат двойственной теории А.В.Столярова [3] , [4]. Введем в рассмотрение систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar\omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{K}}}$:

$$\begin{cases}
\bar\omega^0_0=\omega^0_0-\frac{1}{n+1}(\tilde\Lambda_{\mathcal{K}}+\tilde L_{\mathcal{K}}+\tilde H_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \bar\omega^n_0=\omega^n_0,\\
\bar\omega^p_0=\omega^p_0+\Lambda^{qp}\Lambda^n_{q\alpha}\,\omega^\alpha_0+\Lambda^{qp}_n\Lambda^n_{qn}\,\omega^n_0, \quad \bar\omega^i_0=\omega^i_0+L^{ji}_n L^n_{j\alpha}\,\omega^\alpha_0+L^{ji}_n L^n_{jn}\,\omega^n_0,\\
\bar\omega^\alpha_0=\omega^\alpha_0+H^{\beta\alpha}_n H^n_{\beta n}\,\omega^n_0, \quad \bar\omega^0_n=\omega^0_n, \quad \bar\omega^p_n=-\Lambda^{qp}_n\,\omega^n_q,\\
\bar\omega^j_n=-L^{ji}_n\,\omega^0_i, \quad \bar\omega^\beta_n=-H^{\beta\alpha}_n\,\omega^0_\alpha, \quad \bar\omega^0_p=\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_n,\\
\bar\omega^n_n=\omega^n_n-\frac{1}{n+1}(\tilde\Lambda_{\mathcal{K}}+\tilde L_{\mathcal{K}}+\tilde H_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \bar\omega^i_p=-\Lambda^n_{qp}L^{ij}_n\,\omega^q_j,\\
\bar\omega^\alpha_p=-\Lambda^n_{qp}H^{\alpha\beta}_n\,\omega^q_\beta, \quad \bar\omega^0_i=L^n_{ji}\,\omega^j_n, \quad \bar\omega^n_p=-\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_0,\\
\bar\omega^t_p=\omega^t_p+\Lambda^{tq}_n\Lambda^n_{qp\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0-\frac{1}{n+1}\delta^t_p(\tilde\Lambda_{\mathcal{K}}+\tilde L_{\mathcal{K}}+\tilde H_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0,\\
\bar\omega^\ell_i=\omega^\ell_i+L^{\ell j}_n L^n_{ji\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0-\frac{1}{n+1}\delta^\ell_i(\tilde\Lambda_{\mathcal{K}}+\tilde L_{\mathcal{K}}+\tilde H_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0,\\
\bar\omega^p_i=-L^n_{ij}\Lambda^{pq}_n\,\omega^j_q, \qquad \bar\omega^\alpha_i=-L^n_{ji}H^{\alpha\beta}_n\,\omega^j_\beta,\\
\bar\omega^n_i=-L^n_{ji}\,\omega^j_0, \quad \bar\omega^0_\alpha=H^n_{\beta\alpha}\,\omega^\beta_n, \quad \bar\omega^i_\alpha=-L^{ij}_n H^n_{\beta\alpha}\,\omega^\beta_j,\\
\bar\omega^p_\alpha=-\Lambda^{pq}_n H^n_{\beta\alpha}\,\omega^\beta_q, \quad \bar\omega^n_\alpha=-H^n_{\beta\alpha}\,\omega^\beta_0,\\
\bar\omega^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha-\frac{1}{n+1}\delta^\beta_\alpha(\tilde\Lambda_{\mathcal{K}}+\tilde L_{\mathcal{K}}+\tilde H_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0+H^{\beta\gamma}_n H^n_{\gamma\alpha\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0.
\end{cases} \qquad (I.I)$$