A_i и A_3; 3/ фокусами лучей A_iB_i и A_iB_j прямолинейных конгруэнций (A_iB_i) и (A_iB_j) являются соответственно точки A_i, B_i и A_i, B_j; 4/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_iB_i) соответствуют; 5/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4); 6/поверхность (A_4) вырождается в прямую $E_{12}A_4$, где $E_{12}=A_1+A_2$; 7/ асимптотические линии на поверхностях (A_3), (E^*_{12}), (B_i) и (F_i), где E^*_{12} -четвертая гармоническая к точке E_{12} относительно вершин A_1 и A_2, а F_1 и F_2 -точки пересечения прямой $E_{12}A_3$ с коникой C, соответствуют.

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции K_2^3 являются инвариантными квадриками, уравнения которых имеют соответственно вид:

$$2(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3x^4-2x^1x^2=0, \qquad (7)$$

$$2(x^1)^2+(x^3)^2+2x^3x^4-2x^1x^2=0. \qquad (8)$$

Список литературы

1.Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Тр.Томского ун-та,1968.Геометрич.сб.,вып.3,1963, с.43-53.

2.Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двукратными невырождающимися фокальными поверхностями.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14,Калининград,1983,с.87-91.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.В. С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 изучается один из специальных классов вырожденных [1] конгруэнций $(C_P)_{1,2}$, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью P, описывающей конгруэнцию с невырождающейся огибающей поверхностью.

Вырожденные конгруэнции такого типа характеризуются отображением, ставящим в соответствие каждой плоскости P единственную конику C, полным прообразом которой является одномерное подмногообразие $(P)_C$ плоскостей P. При этом каждое семейство $(P)_C$ высекает на огибающей поверхности плоскостей P некоторую линию Γ_C.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4),$$

а линейные дифференциальные формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0.$$

Специализируем репер R таким образом, чтобы вершина A_4 совпадала с характеристической точкой плоскости P, вершины A_1 и A_2 совпадали с точками пересечения коники C и плоскости P, а вершина A_3 являлась полюсом прямой

A_1A_2 относительно коники C. Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений вырожденных конгруэнций $(C_p)_{1,2}$ теперь приводятся соответственно к виду

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0;$$

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^4, \quad \omega_i^4 = \Gamma_i^4 \omega_3^4, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \tag{1}$$

$$\omega_4^1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_4^2 = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^i\omega_3^4 + \omega_j,$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \Gamma\omega_3^4, \quad \omega_4^3 = 0, \ (\omega_3^4 \neq 0),$$

где формы $\omega_i^3 \overset{def}{=} \omega_i$ приняты в качестве базисных, индексы i, j, k принимают значения $1, 2$, причем здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и суммирование по i и j не производится.

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка $E_{1,2} = A_1 + A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной к линии Γ_c. В этом случае будет выполнено условие

$$\alpha\Gamma_3^{42} + \gamma\Gamma_3^{41} = 0 \tag{2}$$

и форма $\omega_1^1 - \omega_2^2$ становится главной.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнциями K назовем конгруэнции $(C_p)_{1,2}$, для которых выполняются следующие условия: I/ прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) односторонне расслояемы к конгруэнции касательных к линиям Γ_c; 2/ асимптотические линии на огибающей поверхности семейства плоскостей P гармонически разделяют сеть, огибаемую прямыми (A_iA_3).

Аналитически условия определения записываются в виде

$$\omega_i^j \wedge (\omega_i + \omega_j) = 0, \tag{3}$$

$$(\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_i^j + \omega_j^i) \wedge \omega_3^j = 0, \tag{4}$$

$$(\omega_i + \omega_j) \wedge \omega_3^j + (\omega_j^j - \omega_i^i) \wedge \omega_i^j = 0 \tag{5}$$

а также $\beta = 0$.

Равенства (3) приводят к соотношениям

$$\Gamma_i^j (\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42}) = 0, \tag{6}$$

причем при $\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} \overset{def}{=} k \neq 0$ из условий (5) будем иметь $(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^1)(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega_3^4 = 0$. Если $\Gamma_1^2 \neq \Gamma_2^1$, то последнее соотношение приводится к виду

$$(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_1 + \omega_2) = 0. \tag{7}$$

Учитывая (7) в (5), мы получаем противоречивое равенство $\omega_i \wedge \omega_j = 0$.

Если $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^1$, то из условий (4) находим

$$(1 + k(\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2))(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_1 + \omega_2) = 0.$$

Так как равенство (7) приводит к противоречию, то из последнего соотношения будем иметь $1 + k(\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2) = 0$, откуда $\omega_3^1 + \omega_3^2 = 0$. Замыкая полученное уравнение и учитывая условие (2), получим $\alpha = \gamma = 0$. В этом случае характеристическая поверхность семейства плоскостей P вырождается в точку, что противоречит постановке задачи.

Таким образом, анализируя систему (3), (4), (5), убеждаемся, что $\Gamma_3^{41} \neq \Gamma_3^{42}$ и следовательно из соотношений (6) получим

$$\omega_i^j = 0. \tag{8}$$

В этом случае условия (4), (5) приводятся к виду

$$(\omega_i^i - \omega_j^j) \wedge \omega_3^j = 0, \tag{4'}$$

$$(\omega_i + \omega_j) \wedge \omega_3^j = 0. \tag{5'}$$

Складывая равенства (5'), получим $\Gamma_3^1 + \Gamma_3^2 = 0$, откуда $\Gamma_3^1 = -\Gamma_3^2 \overset{def}{=} b$. Из (5') тогда будем иметь $b(\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42}) - 1 = 0$. Складывая равенства (4'), находим

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = \varphi(\omega_1 + \omega_2).$$

Перепишем соотношение (2) в виде $\dfrac{\Gamma_3^{41}}{\alpha} = -\dfrac{\Gamma_3^{42}}{\gamma} \overset{def}{=} \lambda$. Тогда $\Gamma_3^{41} = \alpha\lambda$, $\Gamma_3^{42} = -\gamma\lambda$, а также $b\lambda(\alpha + \gamma) = 1$. Замыкая уравнения (8), получим $\Gamma_1^4 = -\dfrac{b}{\alpha}$; $\Gamma_2^4 = \dfrac{b}{\gamma}$. С учетом предыдущих соотношений будем иметь

$$\omega_1^4 = -\frac{1}{\alpha(\alpha+\gamma)}(\omega_4^1-\omega_4^2),\quad \omega_2^4=\frac{1}{\gamma(\alpha+\gamma)}(\omega_4^1-\omega_4^2),$$
$$\omega_3^1 = -\alpha\omega_1^4+\omega_2,\quad \omega_3^2=-\gamma\,\omega_2^4+\omega_1. \tag{9}$$

Осуществляя частичное продолжение системы (9) совместно с уравнениями $\omega_4^1=\alpha\omega_1$, $\omega_4^2=\gamma\,\omega_2$,находим

$$d\alpha+\alpha(2\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4)=-\frac{\Gamma\lambda\alpha^2(\alpha+\gamma)}{\gamma}\,\omega_1,$$
$$d\gamma+\gamma(2\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)=\frac{\Gamma\lambda\gamma^2(\alpha+\gamma)}{\alpha}\,\omega_2, \tag{10}$$

а также

$$(\alpha-\gamma)(3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)+\varphi)=0,$$
$$\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)+2\lambda\alpha\gamma+\varphi=0. \tag{11}$$

При условии $\alpha\neq\gamma$ получим $\varphi=-3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)$ и следовательно $\Gamma=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$. Дифференцируя уравнение $2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\omega_3^4$, получим $3\lambda^2\alpha^2\gamma^2+4=0$, откуда $\omega_1^1-\omega_2^2=-2\sqrt{-3}(\omega_1+\omega_2)$. Замыкание последнего уравнения имеет вид $\omega_1\wedge\omega_2=0$, т.е. противоречиво.Таким образом,из (11) имеем $\alpha=\gamma$, $\varphi=-2\lambda\alpha(\Gamma+\alpha)$. Подставляя полученные соотношения в (10), будем иметь $d\alpha+\alpha(\omega_3^3-\omega_4^4)=0$,а также $\Gamma+2\alpha=0,\ \varphi=2\lambda\alpha^2$. Переобозначая $\lambda\alpha\overset{def}{=}t$, систему уравнений Пфаффа конгруэнций K окончательно запишем в виде

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^4=\frac{1}{2\alpha}(\omega_j-\omega_i),\quad \omega_3^i=\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_j),$$
$$\omega_3^4=t(\omega_1-\omega_2),\quad \omega_4^i=\alpha\omega_i,\ \omega_4^3=0,\ d\alpha+\alpha(\omega_3^3-\omega_4^4)=0, \tag{12}$$
$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=-2\alpha\,\omega_3^4,\quad \omega_1^1-\omega_2^2=2\alpha t(\omega_1+\omega_2).$$

Продолжая систему (12), находим

$$dt+t(\omega_4^4-\omega_3^3)=0, \tag{13}$$

причем замыкание последнего уравнения удовлетворяется тождественно.

Таким образом,конгруэнции K определяются вполне интегрируемой системой уравнений (12),(13).

Укажем некоторые свойства конгруэнций K .

1.Поверхности (A_i) огибаются семействами плоскостей $(A_iA_3A_4)$,что непосредственно следует из равенств

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\omega_iA_3+\omega_i^4A_4.$$

2.Фокальные точки луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют вершины репера A_1 и A_2 ,причем одна из них совпадает с точкой $E_{1,2}$.

Свойство справедливо,т.к. фокальные точки sA_1+tA_2 определяются уравнением $s^2-t^2=0$

3.Фокальные точки луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) являются двойными точками гомографии пары поверхностей (A_1) и (A_2)

Фокусы sA_3+tA_4 луча A_3A_4 определяются уравнением $st+\alpha t^2=0$ и совпадают с точками A_3 и $A_4-\alpha A_3$. Торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) задаются уравнением $(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)=0$. Имеем

$$dA_i\Big|_{\omega_i-\omega_j=0}=\omega_i^iA_i+\omega_iA_3,$$
$$dA_i\Big|_{\omega_i+\omega_j=0}=\omega_i^iA_i-\frac{1}{\alpha}\omega_i(A_4-\alpha A_3),$$

откуда и следует утверждение 3.

4.Прямолинейные конгруэнции (A_iA_4) являются конгруэнциями W .

Фокальными поверхностями конгруэнций (A_iA_4) являются поверхности (A_i) и (A_4).Асимптотические линии этих поверхностей задаются одним и тем же уравнением $(\omega_1)^2+(\omega_2)^2=0$,что и доказывает утверждение 4.

5. Плоскости коник C образуют пучок.

Характеристика плоскости коники C задается уравнением $x^1-x^2-2\alpha t x^3=0$ и может быть определена точками $E_{1,2}$ и $M=2\alpha tA_1+A_3$.Имеем $d[E_{1,2}M]=(\dots)[E_{1,2}M]$, т.е. характеристика неподвижна.

6 .Конгруэнция касательных к линиям Γ_C односторонне расслояема к прямолинейным конгруэнциям (A_iA_3).

Свойство справедливо,так как условия расслоения в силу системы (12) удовлетворяются тождественно.

Получено каноническое представление поверхности (A_4), ассоциированной с конгруэнциями K:

$$z = \frac{2}{3}\lambda(y^3 - x^3) + \frac{1}{2\alpha}(x^2 + y^2) + [4].$$

Найден трехпараметрический пучок соприкасающихся квадрик к поверхности (A_4):

$$2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{34}\left(2x^3x^4 - \frac{1}{\alpha}(x^1)^2 - \frac{1}{\alpha}(x^2)^2\right) + a_{33}(x^3)^2 = 0,$$

из которого выделен пучок квадрик Дарбу:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1x^3 + 2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + b_{33}(x^3)^2 = 0,$$

а также квадрика Ли поверхности (A_4):

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha t x^1x^3 + 2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + (\alpha^2t^2 - 1)(x^3)^2 = 0.$$

Доказано, что линия Γ_c является линией Дарбу поверхности (A_4).

Найдены директриса Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (A_4). Эти три замечательные прямые совпадают друг с другом и определяются точками A_4 и $\alpha t A_1 - \alpha t A_2 + 2A_3$. Таким образом, канонический пучок поверхности (A_4) вырождается в прямую.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.П. Сопина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции V_2^3 эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию квадрик Q к реперу $R = \{A, \overline{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$, где A - центр эллипсоида Q, вектор $\overline{e}_3$ направлен в фокальную точку M_3 эллипсоида Q, векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ лежат в плоскости, сопряженной направлению вектора $\overline{e}_3$ относительно Q, причем вектор $\overline{e}_1$ сопряжен вектору $\overline{e}_2$ и направлен по прямой AM, где M -характеристическая точка плоскости. Концы векторов $\overline{e}_\alpha$ расположены на эллипсоиде Q. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с плоскостью $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Уравнение квадрики Q относительно данного репера принимает вид:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Конгруэнция V_2^3 определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k \ (i \neq j), \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k,$$
$$\omega^i = \Gamma^{ik}\omega_k, \quad \omega^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^3 + \rho\omega_1 = 0, \qquad (2)$$

формы

$$\omega_i^3 = \omega_i \quad (i, j = 1,2) \qquad (3)$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм.

Назовем конгруэнцией V_2^{31} такую конгруэнцию V_2^3, у которой поверхность (M_3) вырождается в линию.

6 Зак. 1401