

Е. П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИпсоИДОВ С РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙСЯ
 ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассмотрена конгруэнция H эллипсоидов, центры которых описывают торс, не вырождающийся в плоскость. Исследован класс H_0 , который разбивается на два подкласса: конгруэнции $H_{0,1}$ и конгруэнции $H_{0,2}$, для каждого из которых получены некоторые геометрические свойства.

Рассмотрим конгруэнции H эллипсоидов Q , центры которых описывают торс, не вырождающийся в плоскость. Отнесем конгруэнцию H к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где вектор \bar{e}_3 сопряжен относительно Q касательной плоскости к поверхности (A) , направлен по прямолинейной образующей поверхности (A) , а \bar{e}_2 сопряжен относительно Q векторам \bar{e}_1 и \bar{e}_3 , причем концы векторов $\bar{e}_\alpha (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ расположены на эллипсоиде.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции H запишется в виде:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = h \omega^2, \quad \omega_1^2 = s_2^2 \omega^2, \quad \omega_2^2 = s_1^1 \omega^1 + s_2^1 \omega^2, \quad (1)$$

$$\theta_3^i = \tau_k^i \theta^k, \quad \theta_i^i = c_k^i \omega^k = 0, \quad \omega_3^3 = c_k \omega^k, \quad h \neq 0 \quad (i, j, k = 1, 2),$$

где

$$\theta_3^i = \omega_3^i + \omega_i^3, \quad \theta_i^i = \omega_i^i - \omega_3^3.$$

Уравнения эллипсоида Q , ассоциированных квадратик Q_1, Q_2 принимают соответственно вид:

$$\mathcal{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad (2)$$

$$\mathcal{F}_i \equiv c_i^i (x^i)^2 + c_i^j (x^j)^2 + \lambda_i x^i x^2 + (\tau_i^i x^i + \tau_i^j x^j) x^3 + x^i + c_i = 0, \quad (3)$$

где $\lambda_1 = s_1^2 + s_1^1, \quad \lambda_2 = s_2^1.$ (4)

Из системы (1) следует, что конгруэнция H определяется с произволом шести функций двух аргументов.

Обозначим через M_α конец вектора $\bar{e}_\alpha, M_\alpha^*$ - конец вектора $-\bar{e}_\alpha, \ell_\alpha$ - прямую, проходящую через центр эллипсоида Q и конец вектора $\bar{e}_\alpha, \alpha_\beta$ - плоскость $x^\beta = 0$.

Анализируя систему уравнений

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F}_1 = 0, \quad \mathcal{F}_2 = 0, \quad (5)$$

убеждаемся, что конгруэнция H обладает следующими свойствами:

1/ Если точка M_3 является фокальной точкой квадратки $Q [1]$, то и точка M_3^* является ее фокальной точкой, и наоборот;

2/ Точки M_i и M_i^* не могут быть одновременно фокальными точками квадратки Q .

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией H_0 называется конгруэнция H , у которой M_α является фокальными точками эллипсоида Q .

Т е о р е м а 1. Существует два и только два класса конгруэнций H_0 конгруэнции $H_{0,1}$ и конгруэнции $H_{0,2}$. Каждый класс определяется с произволом одной функцией двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3) следует

$$c_i = 0, \quad c_i^i = -1, \quad c_i^j = 0. \quad (6)$$

Система пфаффовых уравнений $\theta_i^i = c_k^i \omega^k, \quad \omega_3^3 = c_k \omega^k$

в силу (6) приводится к виду:

$$\omega_i^i + \omega^i = 0, \quad \omega_3^3 = 0. \quad (7)$$

Замыкая эти уравнения, получим:

$$S_1^1 (S_2^2 + 1) = 0, \quad S_2^2 (S_1^1 + 1) = 0, \quad \tau_1^2 = 0. \quad (8)$$

Из (8) выделяются только два случая

$$S_1^1 = 0, \quad S_2^2 = 0, \quad \tau_1^2 = 0, \quad (9)$$

$$S_1^1 = -1, \quad S_2^2 = -1. \quad (10)$$

В первом случае система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_i^i + \omega^i = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_2^3 = h\omega^2, \\ \omega_2^1 = S_2^1 \omega^2, \quad \omega_3^1 = \tau_1^1 \omega^1 + \tau_2^1 \omega^2, \quad \omega_3^2 = (\tau_2^2 - h)\omega^2 \end{aligned} \quad (11)$$

и определяется с произволом одной функции двух аргументов. Во втором случае система (1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega^2 = 0, \quad \omega_i^i + \omega^i = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_2^3 = h\omega^2, \\ \omega_2^1 = -\omega^1 + S_2^1 \omega^2, \quad \omega_3^1 = \tau_1^1 \omega^1 + \tau_2^1 \omega^2, \quad \omega_3^2 = (\tau_2^2 - h)\omega^2 \end{aligned} \quad (12)$$

и имеет такое же решение.

Назовем конгруэнции, определяемые системами (II) и (12) соответственно конгруэнциями $H_{\alpha,1}$ и $H_{\alpha,2}$.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции H_{α} обладают следующими свойствами: 1/одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) отсекает на торсе (A) его прямолинейные образующие; 2/поверхность (M_3) является торсом с прямолинейными образующими, коллинеарными ℓ_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/В силу (8) уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) приводится к виду:

$$\omega^2 ((\tau_2^2 - \tau_1^1 - 1)\omega^1 - \tau_2^1 \omega^2) = 0, \quad (13)$$

откуда следует, что $\omega^2 = 0$ определяет торсы.

2/Имеем:

$$dM_3 \Big|_{\omega^2=0} = d(A + \bar{e}_3) \Big|_{\omega^2=0} = ((1 + \tau_1^1)\bar{e}_1 + \tau_1^2\bar{e}_2)\omega^1. \quad (14)$$

Учитывая (8) и (1) убеждаемся, что линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (M_3) — прямые. Уравнение асимптотических линий на поверхности (M_3) имеет вид:

$$\omega^2 (\tau_1^2 \omega^1 + (1 + \tau_2^2 - h)\omega^2) = 0. \quad (15)$$

Так как $\tau_1^2 = 0$, то асимптотические линии на поверхности (M_3) — сдвоенные. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Поверхность (M_2) , ассоциированная с конгруэнцией $H_{\alpha,2}$, вырождается в линию с касательной параллельной плоскости α_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$dM_2 = \omega^1 (1 + S_1^1)\bar{e}_1 + \omega^2 (S_2^1\bar{e}_1 + h\bar{e}_3). \quad (16)$$

Учитывая (10), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $H_{\alpha,1}$ обладают следующими свойствами: 1/поверхность (M_2) является торсом с прямолинейными образующими, коллинеарными ℓ_1 ; 2/прямолинейная конгруэнция (ℓ_2) — цилиндрическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1/Используя (16), находим уравнение асимптотических линий поверхности (M_3)

$$\omega^2 ((S_2^2 (1 + S_1^1) + h\tau_1^2)\omega^1 + (S_2^1 S_2^2 + h(\tau_2^2 - h))\omega^2) = 0. \quad (17)$$

В силу (9), (17) приводится к виду:

$$h(\tau_2^2 - h)(\omega^2)^2 = 0. \quad (18)$$

2/Имеем

$$d\bar{e}_2 \Big|_{\omega^2=0} = \omega_2^1 \bar{e}_1 + \omega_2^2 \bar{e}_2 + \omega_2^3 \bar{e}_3 \Big|_{\omega^2=0} = S_1^1 \omega^1 \bar{e}_1 = 0,$$

значит, прямолинейная конгруэнция (ℓ_2) — цилиндрическая. Теорема доказана.

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n -мерном проективном пространстве. - Тр. геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

2. С о п и н а Е.П. О конгруэнциях центральных квадрик в аффинном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, с. 127-130.

Т.П. Ф у н т и к о в а

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ
ПАРой ПРЯМЫХ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные $[f]$ конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$, порожденные прямыми L и L^* , причем многообразие (L) - двумерное, а многообразие (L^*) - одномерное. Соответствие между элементами многообразий таково, что полным прообразом прямой L^* является линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$ прямой конгруэнции (L) . Получены некоторые свойства конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$, а также рассмотрены расслоенные конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$.

Исследование ведется в каноническом репере $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина A которого совмещается с той точкой луча L , в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_{L^*}$ параллельна соответствующему лучу L^* , конец вектора \vec{e}_1 помещается в точку луча L^* , в которой касательная плоскость к поверхности (L^*) параллельна соответствующему лучу L , вектор \vec{e}_3 направлен по прямой L и пронормирован соответствующим образом. Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$ в репере R имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega^1 + \omega_1^1 &= 0, & \omega^1 &= f \omega_2^1, & \omega_2^3 &= c \omega^1, & \omega_3^2 &= m \omega_2^1 + \omega_3^1, \\ \omega^3 + \omega_1^3 &= v \omega_2^1, & \omega^2 &= l \omega_2^1 + k \omega_3^1, & \omega^3 &= q \omega_2^1 + p \omega_3^1, & (1) \\ \omega_2^2 &= s \omega_2^1 + n \omega_3^1, & \omega_1^2 &= h \omega_2^1 + (v-k) \omega_3^1. \end{aligned}$$

Такие конгруэнции определяются с произволом трех функций двух аргументов.