4. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 82 с.

5. *Акивис М.А.* О плоских гиперраспределениях в P^n // Мат. заметки. 1984. Т.36. Вып. 2. С. 213 – 222.

G.V. K u z n e t s o v

ABOUT VECTORS OF THE SECOND ORDER AND HYPERDISTRIBUTION IN A EUCLIDEAN SPACE E^n

In the given work the differentiable mapping between two areas of Euclidean space E^n is considered. In the first area is defined hyperdistribution, the frame of the second order, and also inhering to it of a vector of the second order is set. The properties hyperdistributions are considered in an association from properties of vectors of the second order.

УДК 514.75

И.А. К у з я к и н а

(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ V_n ПРОСТРАНСТВА $К_{n+1}$

Рассматривается гиперповерхность V_n (n+1)-мерного проективного пространства с вырожденным абсолютом - пространства $К_{n+1}$. В репере 1-го порядка дано задание гиперповерхности V_n . Доказана теорема существования гиперповерхности $V_n \subset К_{n+1}$. Построены поля прямых, внутренним образом присоединенные к гиперповерхности V_n в дифференциальных окрестностях 3-го и 4-го порядков. К гиперповерхности V_n присоединены инвариантные точечный $\{M_J\}$и тангенциальный $\{\sigma^K\}$ реперы, двойственные друг другу.

Пространством n+1 измерений с проективной метрикой, или пространством $К_{n+1}$, называется такое пространство, образом точки которого является точка проективного пространства P_{n+1}, а фундаментальной группой - подгруппа проективных преобразований, сохраняющих некоторый поляритет. Этот поляритет называется абсолютным поляритетом пространства $К_{n+1}$. Аналогичные вопросы для трехмерного пространства рассмотрены Р.Г. Бухаревым [1] и И.Н. Мигалевой [2]. Известно [3], что число параметров группы движений пространства $К_{n+1}$ равно $S=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}+\dfrac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}$, где δ - дефект поляритета.

Придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$\overline{J},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n+1};\ J,K,L=\overline{1,n+1};\ i,j,k=\overline{1,n-1};\ a,b,c=\overline{1,n}.$

Оператор дифференцирования действует по закону:

$$\nabla T^{jbn}_{ian+1} = dT^{jbn}_{ian+1} - T^{jbn}_{kan+1}\omega^k_i - T^{jbn}_{icn+1}\omega^c_a - T^{jbn}_{ian+1}\omega^{n+1}_{n+1} + T^{kbn}_{ian+1}\omega^j_k + T^{jcn}_{ian+1}\omega^b_c + T^{jbn}_{ian+1}\omega^n_n.$$

Пусть в (n+1)-мерном проективном пространстве P_{n+1} задана некоторая гиперплоскость Π_n, а в ней плоскость Π_{n-1}, выбранная так, что во всех гиперплоскостях пространства P_{n+1}, проходящих через Π_{n-1}, задан невырожденный метрический тензор g_{ij}.

Рассмотрим такую группу проективных преобразований, которые оставляют неподвижной гиперплоскость Π_n, а в ней плоскость Π_{n-1}. Геометрия этой группы является предметом нашего исследования. Полученное пространство является аффинным пространством, в котором зафиксировано некоторое направление гиперплоскостей W_n с заданной в них метрикой. Эти гиперплоскости W_n назовем особыми.

Рассмотрим гиперповерхность V_n, погруженную в пространство K_{n+1} [4]. Исключим из рассмотрения такие точки $A \in V_n$, в которых касательная гиперплоскость $T_n(A)$ гиперповерхности V_n совпадает с особой гиперплоскостью $W_n(A)$. Тогда в каждой точке $A \in V_n$ определена плоскость $E_{n-1}(A) = T_n(A) \cap W_n(A)$.

Присоединим к гиперповерхности $V_n \subset K_{n+1}$ точечный репер 1-го порядка R^1: $A_0 \equiv A$, $\{A_i\} \subset E_{n-1}(A)$, $A_n \in T_n(A)$, $A_n \notin W_n(A)$, $A_{n+1} \in W_n(A)$, $A_{n+1} \notin T_n(A)$. Уравнения движения точечного репера имеют вид :

$$dA_{\bar{J}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} A_{\bar{K}},\ d\omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} = \omega^{\bar{L}}_{\bar{J}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{L}},\ \omega^{\bar{J}}_{\bar{J}} = 0. \tag{1}$$

Гиперповерхность V_n в R^1 задается уравнением

$$\omega^{n+1}_0 = 0 \tag{2}$$

При фиксации точки A плоскости $E_{n-1}(A)$, $T_n(A)$, $W_n(A)$ неподвижны. Отсюда следует, что формы $\omega^i_0, \omega^n_0, \omega^n_i, \omega^{n+1}_i, \omega^{n+1}_n, \omega^n_{n+1}$ являются главными. Приняв совокупность форм $\{\omega^i_0, \omega^n_0\} \overset{\text{def}}{=} \{\omega^a\}$, за базисные получим уравнения

$$\omega^{n+1}_a = a^{n+1}_{ab}\omega^b, \quad \omega^n_i = \lambda^n_{ia}\omega^a, \quad \omega^n_{n+1} = \lambda^n_{n+1,a}\omega^a, \tag{3}$$

причем

$$\nabla a^{n+1}_{ab} + a^{n+1}_{ab}\omega^0_0 = a^{n+1}_{abc}\omega^c, \tag{4}$$

$$\nabla\lambda^n_{ij} + \lambda^n_{ij}\omega^0_0 = \lambda^n_{ija}\omega^a, \tag{5}$$

$$\nabla\lambda^n_{in} + \lambda^n_{in}\omega^0_0 - \lambda^n_{ij}\omega^j_n - \omega^0_i = \lambda^n_{ina}\omega^a, \tag{6}$$

$$\nabla\lambda^n_{n+1,i} + \lambda^n_{n+1,i}\omega^0_0 - \lambda^n_{ki}\omega^k_{n+1} = \lambda^n_{n+1,ia}\omega^a, \tag{7}$$

$$\nabla\lambda^n_{n+1,n} + \lambda^n_{n+1,n}\omega^0_0 - \lambda^n_{n+1,j}\omega^j_n - \lambda^n_{kn}\omega^k_{n+1} - \omega^0_{n+1} = \lambda^n_{n+1,na}\omega^a, \tag{8}$$

$$a^{n+1}_{[ab]} = 0 \tag{9}$$

Из соотношений (4),(9) следует, что величины a^{n+1}_{ab} образуют симметрический тензор. Будем полагать, что гиперповерхность регулярная [5], т.е. тензор $\{a^{n+1}_{ab}\}$ невырожденный. Построим обратный ему тензор $\{a^{ab}_{n+1}\}$: $a^{n+1}_{ab}a^{bc}_{n+1} = \delta^c_a$, который удовлетворяет уравнениям:

$$\nabla a^{bc}_{n+1} + a^{bc}_{n+1}\omega^0_0 = a^{bc}_{n+1,a}\omega^a = \lambda^{bca}_{n+1}\omega^{n+1}_a.$$

Уравнения (2)-(8) и соотношение (9) задают гиперповерхность $V_n \subset K_{n+1}$ в репере R^1. Системы величин $\Gamma_2 = \{a^{n+1}_{ab}, \lambda^n_{ia}, \lambda^n_{n+1,a}\}$, $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a^{n+1}_{abc}, \lambda^n_{iac}, \lambda^n_{n+1,ac}\}$ являются фундаментальными объектами [6] соответственно 2-го и 3-го порядков гиперповерхности V_n. Доказана

Теорема 1. *В пространстве K_{n+1} регулярная гиперповерхность V_n существует с произволом $n+1$ функций n аргументов.*

Построим инвариантные поля точек $M_n = A_n + \nu^0_n A_0 + \nu^i_n A_i$ и прямых $L=[A_0, M_n]$. Из условия инвариантности M_n следует

$$\nabla\nu^0_n + \nu^i_n\omega^0_i + \omega^0_n = \nu^0_{na}\omega^a, \quad \nabla\nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{na}\omega^a. \tag{10}$$

Имеют место охваты

$$\nu^0_n = -B^0_n, \quad \nu^i_n == a^i_n \overset{\text{def}}{=} -a^{n+1}_{kn}a^{ki}_{n+1},$$

где

$$B^0_n = \frac{n}{n+2}a^{ijn}_{n+1}a^{n+1}_{ij}a^{n+1}_{nn} + \frac{1}{e}a^{in}_{n+1}a^{n+1}_{nn}\Lambda^0_i, \quad e = a^{n+1}_{nn}a^{nn}_{n+1},$$

$$\Lambda^0_i = \lambda^n_{in} - \lambda^n_{ij}a^i_n, \quad \nabla\Lambda^0_i - \omega^0_i = \Lambda^0_{ij}\omega^j.$$

Теорема 2. *Поля точек M_n и прямых L внутренним образом присоединяются к гиперповерхности V_n в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

Аналогично из условия инвариантности точки $M_{n+1} = A_{n+1} + \nu^0_{n+1}A_0 + \nu^i_{n+1}A_i$ следует

$$\nabla\nu^0_{n+1} + \nu^i_{n+1}\omega^0_i + \omega^0_{n+1} = \nu^0_{n+1,a}\omega^a, \quad \nabla\nu^i_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \nu^i_{n+1,a}\omega^a. \tag{11}$$

С помощью [7] найдены охваты

$$\nu^i_{n+1} = \lambda^i_{n+1} + \lambda^n_{n+1}a^i_n, \quad \nu^0_n = \frac{1}{2}(T + a^{n+1}_{ij}\nu^i_{n+1}\nu^j_{n+1}) + \nu^i_{n+1}t_i,$$

где

$$t_i = \frac{1}{n+1}a^{n+1}_{ijk}a^{jk}_{n+1}, \quad T = \frac{1}{n-1}(t_{ij} - t_i t_j)a^{ij}_{n+1}.$$

Здесь t_{ij} - продолжения величин 3-го порядка t_i.

Теорема 3. *Поля точек M_n и прямых L внутренним образом присоединяются к гиперповерхности V_n в дифференциальной окрестности 4-го порядка.*

Введем в рассмотрение тангенциальный репер $\{\tau^{\overline{K}}\}$ для гиперповерхности V_n, связанный с точечным репером $\{A_{\overline{J}}\}$ соотношением

$$(A_{\overline{J}}, \tau^{\overline{K}}) = \delta^{\overline{K}}_{\overline{J}}. \tag{12}$$

Используя охваты $\nu^i_n, \nu^0_n, \nu^i_{n+1}, \nu^0_{n+1}$ и соотношения (12), построим инвариантные точечный $\{M_{\overline{J}}\}$ и тангенциальный $\{\sigma^{\overline{K}}\}$ реперы, удовлетворяющие соотношениям $(M_{\overline{J}}, \sigma^{\overline{K}}) = \delta^{\overline{K}}_{\overline{J}}$. Эти реперы имеют следующее строение:

$$\begin{aligned} &M_0 = A_0, && \sigma^0 = \tau^0 - \nu_i^0\tau^i + \nu_n^0\tau^n + \nu_{n+1}^0\tau^{n+1}, \\ &M_i = A_i + \nu_i^0 A_0, && \sigma^i = \tau^i + \nu_n^i\tau^n + \nu_{n+1}^i\tau^{n+1}, \\ &M_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^0 A_0, && \sigma^n = \tau^n, \\ &M_{n+1} = A_{n+1} + \nu_{n+1}^i A_i + \nu_{n+1}^0 A_0, && \sigma^{n+1} = \tau^{n+1}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\nu_i^0 = \Lambda_i^0$.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 4-го порядка с гиперповерхности $V_n \subset K_{n+1}$ внутренним образом присоединяются двойственные друг другу точечный $\{M_{\bar{J}}\}$ и тангенциальный $\{\sigma^{\bar{K}}\}$ реперы (13).*

Библиографический список

1. *Бухарев Р.Г.* О поверхностях евклидова пространства с невырожденным абсолютом // Уч. зап. ун-та. Казань, 1954. С.39-52.
2. *Мигалева И.Н.* Теория кривых и гиперповерхностей пространства с вырожденным абсолютом // Уч. зап. МГПИ им. Ленина. 1963. Т. 208. С. 252-264.
3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.; Л., 1950.
4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
5. *Вагнер В.В.* Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. 1950. Т.8. С. 11-72.
6. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.
7. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Калининград, 1983. 83 с.

I.A. K u z y a k i n a

HYPERSURFACE V_n OF SPACE K_{n+1}

Hypersurface V_n of the (n+1)-dimensional projective space with degenerate absolut - the space K_{n+1} is considered. The hypersurface V_n is given in the frame of the 1-st order. Existence theorem is proved. In the differential neighbourhood of the 3-rd and 4-th orders fields of a certain straight line are constructed. To the hypersurface V_n we join invariant point and tangential frames dual to each other.

УДК 514.75

В.С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

О ПОДМНОЖЕСТВАХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ