ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 513.7;514.7

КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.П.Б у р л а к о в
(Чечено-Ингушский университет)

Произвольное гладкое многообразие может быть естественным образом оснащено различными алгебраическими структурами. Примерами таких "естественных" алгебраических структур являются алгебры Ли векторных полей, алгебры Грассмана внешних дифференциальных форм, алгебры Вейля и т.п. В данной статье рассматриваются алгебраические структуры на дифференцируемых многообразиях, связанные с канонической сверткой векторных полей и линейных дифференциальных форм. Такие структуры мы будем называть каноническими.

Т е о р е м а 1. На любом гладком многообразии M, $\dim M=n$ существует каноническая метрическая структура, каноническая структура алгебры Клиффорда $C_{n,n}(M)$, каноническая симплектическая структура и каноническая структура алгебры Вейля.

Действительно, рассмотрим произвольное дифференцируемое многообразие M, $\dim M=n$. Пусть TM -касательное расслоение, $B(M)$ -пространство сечений суммы $TM\oplus T^*M$. Если $\zeta\in B(M)$, то $\zeta=\xi+\eta$, где ξ векторное поле на M, а η линейная дифференциальная форма. На $B(M)$ существует индефинитная метрика, определенная канонической сверткой, т.е.

$$g(\zeta,\zeta)\overset{def}{=}\eta(\xi). \tag{1}$$

Метрика g порождена скалярным произведением

$$g(\underset{1}{\zeta},\underset{2}{\zeta})=\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\eta}(\underset{2}{\xi})+\underset{2}{\eta}(\underset{1}{\xi})\right) \tag{2}$$

и в координатной окрестности $U\subset M$ в базисе

$$e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+dx^i,\quad e_{i+n}=\frac{\partial}{\partial x^i}-dx^i \tag{3}$$

имеет вид:

$$g(\zeta,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i^2-\sum_{i=1}^{n}\zeta_{n+i}^2, \tag{4}$$

где $\zeta=\sum\limits_{\alpha=1}^{2n}\zeta_\alpha e_\alpha$.

Введенная на $B(M)$ индефинитная метрика g порождает каноническую клиффордову структуру. Действительно, пусть ΛM грассманово расслоение над TM и Λ^*M -грассманово расслоение над T^*M; $C(M)$-пространство сечений произведения $\Lambda M\wedge\Lambda^*M$. Пространство $C(M)$ обладает структурой алгебры Клиффорда $C_{n,n}$. Для базисных полей $e_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^i}+\varepsilon_\alpha dx^i$, $\varepsilon_\alpha=\pm1$ положим

$$e_\alpha * e_\beta=g(e_\alpha,e_\beta)+e_\alpha\wedge e_\beta, \tag{5}$$

где

$$e_\alpha\wedge e_\beta=\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}-\varepsilon_\alpha\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge dx^i+\varepsilon_\beta\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge dx^j+\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\, dx^i\wedge dx^j.$$

Очевидно, что

$$e_\alpha * e_\beta+e_\beta * e_\alpha=2g(e_\alpha,e_\beta). \tag{6}$$

Учитывая (4), получаем, что $C(M)$ с умножением (5) есть алгебра Клиффорда $C_{n,n}(M)$. Легко видеть, что

$$C(M)=Q(M)/J_g(M), \tag{7}$$

где $Q(M)$-тензорная алгебра над подстилающим пространством $B(M)$, а $J_g(M)$-двусторонний идеал, порожденный элементами вида: $\zeta\otimes\zeta-g(\zeta,\zeta)$, $\zeta\in B(M)$. На $B(M)$, кроме индефинитной метрики g, существует каноническая симплектическая структура h

$$h(\underset{1}{\zeta},\underset{2}{\zeta})=\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\eta}(\underset{2}{\xi})-\underset{2}{\eta}(\underset{1}{\xi})\right), \tag{8}$$

порождающая алгебру Вейля: $W(M)=Q(M)/J_h(M)$, где $J_h(M)$-идеал, порожденный элементами вида $\underset{1}{\zeta}\otimes\underset{2}{\zeta}-\underset{2}{\zeta}\otimes\underset{1}{\zeta}-h(\underset{1}{\zeta},\underset{2}{\zeta})$. На прямой сумме $TM\oplus T^*M$ действует линейная группа $Gl(M)$; если $A\in Gl(M)$, а $\zeta=\xi+\eta\in B(M)$, то $A(\zeta)=A\xi+\eta A^{-1}$ (9). Очевидно, что действие группы $Gl(M)$ сохраняет метрику (1):

$$g(A(\zeta),A(\zeta))=\eta A^{-1}A\xi=\eta\xi=g(\zeta,\zeta), \tag{10}$$

и, следовательно, действие группы $Gl(M)$ есть редукция действия более широкой группы $O_{n,n}(M)$. Отметим, что $\dim Gl=n^2$ $\dim O_{n,n}=2n^2-n$ и для $n>1$ $\dim Gl<\dim O_{n,n}$. Действие группы $O_{n,n}(M)$ может быть представлено действием группы $Spin\, C_{n,n}(M)$

на спинорах и векторах алгебры $C_{n,n}(M)$.

Определение 1. Пусть ∂ -дифференцирование кольца $C_{n,n}(M)$. Клиффордовой связностью, ассоциированной с дифференцированием ∂, называется сечение A расслоения $\Lambda M \wedge \Lambda^* M$, преобразующееся под действием группы $Spin\, C_{n,n}(M)$ по закону

$$A' = a * A * a^{-1} - \partial a * a^{-1}, \quad a \in Spin\, C_{n,n}(M). \qquad (11)$$

Теорема 2. Ковариантные продолжения дифференцирования ∂, определенные формулами

$$\nabla_L \theta = \partial\theta + A_1 * \theta, \qquad (12а)$$

$$\nabla_R \omega = \partial\omega - \omega * A_2, \qquad (12б)$$

$$\nabla \zeta = \partial\zeta + A_1 * \zeta - \zeta * A_2, \qquad (12в)$$

где θ -спинор, ω -коспинор и ζ -вектор, инвариантны относительно действия группы $Spin\, C_{n,n}(M)$.

Ковариантность формул (12а),(12б),(12в) относительно действия группы $Spin\, C_{n,n}(M)$ проверяется непосредственно. Например: $\nabla_L(a*\theta) = \partial a * \theta + a * \partial\theta + a * A * a^{-1} * a * \theta - \partial a * a^{-1} * a * \theta = a * (\partial\theta + A * \theta) = a * (\nabla_L \theta)$, где $a \in Spin\, C_{n,n}(M)$. Если ∂_1 и ∂_2 принадлежат некоторой алгебре Ли, то для операторов ∇_L и ∇_R имеют место тождества

$$([\nabla_L(\partial_1)\nabla_L(\partial_2)] - [\partial_1\partial_2])\theta = (\partial_{[1}A_{2]} + [A_1A_2]) * \theta, \qquad (13а)$$

$$([\nabla_R(\partial_1)\nabla_R(\partial_2)] - [\partial_1\partial_2])\omega = \omega * (\partial_{[2}A_{1]} + [A_2A_1]), \qquad (13б)$$

где $[A_1A_2] = A_1 * A_2 - A_2 * A_1$. Эти тождества определяют кривизну ковариантных дифференцирований спиноров и коспиноров. Формулу (12в) можно представить в виде

$$\nabla\zeta = \partial\zeta + [A\zeta] + \{S\zeta\}, \qquad (12г)$$

где $A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $S = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$, $\{S\zeta\} = S * \zeta + \zeta * S$. Вектор S называется клиффордовым кручением. Если $\nabla(\partial_1)$ и $\nabla(\partial_2)$ ковариантные дифференцирования без кручения со связностями A_1 и A_2, ассоциированными с ∂_1 и ∂_2 соответственно, то имеет место операторное тождество:

$$([\nabla(\partial_1)\nabla(\partial_2)] - [\partial_1\partial_2])\zeta = [\partial_{[1}A_{2]}\zeta] + [[A_1A_2]\zeta]. \qquad (13в)$$

Это тождество определяет кривизну ковариантных дифференцирований векторов. Так как кольцо $C_{n,n}(M)$ Z_2-градуировано, то наряду с дифференцированием можно рассматривать антидифференцирования δ; для $\xi, \eta \in C_{n,n}(M)$

$$\dot\delta(\xi * \eta) = \dot\delta\xi * \eta + (-1)^{\sigma(\xi)} \xi * \dot\delta\eta, \qquad (14а)$$

$$(\xi * \eta)\dot{}\delta = \xi * \eta\dot{}\delta + (-1)^{\sigma(\eta)} \xi\dot{}\delta * \eta, \qquad (14б)$$

где точка указывает направление действия оператора δ, $\sigma(\zeta) = \pm 1$ в зависимости от четности элемента ζ.

Определение 2. Левой градуированной клиффордовой связностью, ассоциированной с δ, называется сечение B расслоения $\Lambda M \wedge \Lambda^* M$, преобразующееся по закону

$$B' = (-1)^{\sigma(a)} a * B * a^{-1} - \dot\delta a * a^{-1}. \qquad (15а)$$

Аналогично определяется правая градуированная связность $\bar{B}$; для $\bar{B}$ имеем:

$$\bar{B}' = (-1)^{\sigma(a)} a * \bar{B} * a^{-1} - a * (a^{-1})\dot{}\delta. \qquad (15б)$$

Теорема 3. Ковариантное продолжение левого антидифференцирования $\dot\delta$

$$\dot\nabla_L \xi = \dot\delta\xi + B_1 * \xi, \qquad (16а)$$

$$\dot\nabla_R \eta = \dot\delta\eta - (-1)^{\sigma(\eta)} \eta * B_2, \qquad (16б)$$

$$\dot\nabla\zeta = \dot\delta\zeta + B_1 * \zeta - (-1)^{\sigma(\zeta)} \zeta * B_2 \qquad (16в)$$

и ковариантное продолжение правого антидифференцирования ${}^{\cdot}\delta$

$${}^{\cdot}\nabla_L \xi = \xi\dot{}\delta - (-1)^{\sigma(\xi)} \bar{B}_1 * \xi, \qquad (17а)$$

$${}^{\cdot}\nabla_R \eta = \eta\dot{}\delta + \eta * \bar{B}_2, \qquad (17б)$$

$${}^{\cdot}\nabla\zeta = \zeta\dot{}\delta - (-1)^{\sigma(\zeta)} \bar{B}_1 * \zeta + \zeta * \bar{B}_2 \qquad (17в)$$

инвариантны относительно действия градуированной подгруппы $G(M)$ группы регулярных элементов кольца $C_{n,n}(M)$.

Инвариантность действия ковариантных операторов (16а)-(17в) проверяется непосредственно. Например, для коспинора η имеем:

$$\dot\nabla_R(\eta * a^{-1}) = \dot\delta\eta * a^{-1} + (-1)^{\sigma(\eta)} * \dot\delta a^{-1} -$$

$$-(-1)^{\sigma(\eta * a^{-1})+\sigma(a)} \eta * a^{-1} * a * B * a^{-1} + (-1)^{\sigma(\eta * a^{-1})} \eta * a^{-1} * \delta^{\circ} a * a^{-1} =$$

$$= (\delta^{\circ}\eta - (-1)^{\sigma(\eta)} \eta * B) * a^{-1} = (\nabla^{\circ}_{K} \eta) * a^{-1},$$

так как $\delta^{\circ} a * a^{-1} + (-1)^{\sigma(a)} a * \delta^{\circ} a^{-1} = 0$.

Действие линейной группы $Gl(M)$ на сумме $TM \oplus T^{*}M$ является редукцией действия группы $O_{n,n}(M)$, то есть связности A и B обобщают линейную связность. Кроме того, действие линейной группы $GL(M)$ на сумме $TM \wedge T^{*}M$ есть редукция действия симплектической группы $Sp_{2n}(M)$, оставляющей инвариантной форму h. Действительно,

$$h(A\underset{1}{\zeta}, A\underset{2}{\zeta}) = \frac{1}{2}(\underset{1}{\eta} A^{-1} A \underset{2}{\xi} - \underset{2}{\eta} A^{-1} A \underset{1}{\xi}) = h(\underset{1}{\zeta}, \underset{2}{\zeta}).$$

Действие симплектической группы $Sp_{2n}(M)$ позволяет определить ковариантное продолжение дифференцирований кольца $C_{n,n}(M)$ при помощи симплектических связностей, которые тоже обобщают линейные связности.

Библиографический список

I. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, I972.

2. Васильев А.М. Теория дифференциально-геометрических структур. М.: Изд-во МГУ, I987.

3. Бурлаков М.П. Клиффордовы расслоения и калибровочные поля// Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанского ун-та, I986. Вып. 23.

4. Бурлаков М.П. Клиффордовы расслоения/ Чечено-Ингушский ун-т. Грозный, I984. I0с. Деп. в ВИНИТИ I0.05.84, № 2984-84.

5. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир. I970. 4I2с.

6. Широков А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях.// В сб. Алгебра. Топология. Геометрия. I967. Итоги науки. ВИНИТИ. М. I969. С.I27-I88.

7. Sternberg S., On the role of field theories in our physical conception of geometry. Lect. Notes Math., 1978, 676, s. 1-80.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. I9 1988

УДК 514.75

ФОКАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С $H(M(\Lambda))$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф.Гребенюк

(Киевское ВВАИУ)

В (n+I)-мерном аффинном пространстве A_{n+1} изучаются фокальные многообразия, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением, которые позволяют построить однопараметрический пучок плоскостей Нордена-Тимофеева - пучок инвариантных нормалей 2-го рода H-плоскости [7]-[9].

В работе используются результаты, полученные в работах [4]-[6]. Все построения проведены в репере нулевого порядка R^{0}.

Фокальной точкой текущего элемента $H(M(\Lambda))$-распределения с центром в точке M, соответствующей определенному направлению смещения центра M, называется [2] точка F этого элемента, которая принадлежит также (с точностью до величин первого порядка малости) соседнему элементу этого распределения, полученному смещением центра M в данном направлении.

I. При смещении центра M вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению, многообразие фокальных точек F гиперплоскости $H(M)$ определяется системой уравнений [1],[4]:

$$y^{r} - \chi^{r}_{u} y^{u} = 0, \quad y^{n+1} = 0, \qquad (I)$$

где

$$\chi^{r}_{i} = -M_{iq} \Lambda^{qr}, \quad \chi^{r}_{\alpha} = -H_{\alpha q} \Lambda^{qr}, \quad \nabla \chi^{p}_{u} + \omega^{p}_{u} = \chi^{p}_{uK} \omega^{K}.$$

В общем случае эта система в гиперплоскости H определяет $(n-r)$-мерную плоскость, проходящую через центр M. Плоскость $\chi(M)$ является характеристикой гиперплоскости $H(M)$ при смещении центра по кривым, принадлежащим Λ-распределению.

2. Аналогично получаем, что квазитензор

$$\varphi^{c}_{\alpha} = -F^{n+1}_{\alpha b} F^{bc}_{n+1}, \quad \nabla \varphi^{c}_{\alpha} + \omega^{c}_{\alpha} = \varphi^{c}_{\alpha K} \omega^{K}, \qquad (2)$$