УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^4

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E^4 рассматриваются две гладкие 2-поверхности M, $\overline{M}$ и диффеоморфизм $f:M\to\overline{M}$. Исследуется случай, когда касательные 2-плоскости в соответствующих точках $p\in M$, $f(p)\in\overline{M}$ ортогональны. Определено отображение $\Omega:TM\to T^{\perp}M$, где $\Omega X=dfX$, $X\in TM$. В[1] доказано, что если две ортогональные поверхности M, $\overline{M}$ в E^4 имеют неплоские связности и $\eta=-\Omega\overline{\eta}$, где η, $\overline{\eta}$ - векторы средних нормалей поверхностей M, $\overline{M}$, то отображение $f:M\to\overline{M}$ - конформное.

Теорема. Если две ортогональные поверхности M, $\overline{M}$ в E^4 имеют плоские связности и главные нормали поверхностей M, $\overline{M}$ 2-мерные, то $\eta=-\Omega\overline{\eta}$.

1. Основные формулы. Пусть M, $\overline{M}$ - две гладкие 2-поверхности в евклидовом пространстве E^4, $f:M\to\overline{M}$ - диффеоморфизм, $F(M)$ - R - алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ - F - модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q,s), ∂ - дифференцирование в E^4.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид [2, с.23]

$$\partial_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X,Y),\ \partial_X\xi=-A_\xi X+\nabla_X^{\perp}\xi, \tag{1}$$

где $X,Y\in T_0^1(M)$, ∇ - связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y)=\langle X,Y\rangle$, α - вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$ - нормальная связность, $A_\xi\in T_1^1(M)$ - симметричный оператор, соответствующий полю $\xi\in TM^{\perp}$. Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$R(X,Y)Z=A_{\alpha(Y,Z)}X-A_{\alpha(X,Z)}Y, \tag{2}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\nu\rangle=g([A_\xi,A_\nu]X,Y),\ X,Y,Z\in TM,\ \xi,\nu\in T^{\perp}M,$$

где $R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$ - кривизна связности ∇, $R^{\perp}(X,Y)\xi=$ $=\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi-\nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi-\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$ - кривизна нормальной связности $\nabla^{\perp}$, $[,]$ - коммутатор матриц.

Обозначим через r - радиус-вектор точки $p\in M$, через $\overline{r}$ - радиус-вектор точки $f(p)\in\overline{M}$. Тогда отображение $f:M\to\overline{M}$ запишется в виде $\overline{r}=f(r)$. Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df(X)=df(\partial_X r)=\partial_X\overline{r}.$$

Так как касательные плоскости поверхностей M, $\overline{M}$ в соответствующих точках ортогональны, то касательная составляющая dfX равна нулю, следовательно, определено отображение $\Omega:TM\to T^{\perp}M$, где $\Omega X=dfX$, $X\in TM$. Связность $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита метрики

$$\bar{g}(X,Y)=\langle dfX,dfY\rangle=\langle\Omega X,\Omega Y\rangle \tag{3}$$

имеет вид [3]

$$\overline{\nabla}_X Y=\Omega^{-1}\nabla^{\perp}_{X}\,\Omega Y. \tag{4}$$

Тензор $\overline{R}$ кривизны связности $\overline{\nabla}$ удовлетворяет равенству

$$\overline{R}(X,Y)Z=\Omega^{-1}R^{\perp}(X,Y)\Omega Z. \tag{5}$$

Определим формы $\overline{\alpha}(X,Y)$ и операторы $\overline{A}_X : T_p^{\perp}M \to T_p^{\perp}M$, индуцируемые отображением f из соответствующих величин поверхности $\overline{\Gamma}$. Если β - вторая квадратичная форма поверхности $\overline{\Gamma}$, то

$$\overline{\alpha}(X,Y)=\beta(\Omega X,\Omega Y)=\partial_X dfY - df\overline{\nabla}_X Y.$$

Имеем [3]

$$\overline{\alpha}(X,Y)=-A_{\Omega X}Y=-A_{\Omega Y}X, \quad \langle \overline{A}_X\Omega Y,\Omega Z\rangle=\langle X,\overline{\alpha}(Y,Z)\rangle. \tag{6}$$

Тогда

$$\overline{A}_X\Omega Y=-\alpha(X,Y), \quad \overline{A}_X\Omega Y=\overline{A}_Y\Omega X. \tag{7}$$

Кроме того, трилинейная форма

$$\psi(X,Y,Z)=\langle \overline{A}_X\Omega Y,\Omega Z\rangle=-\langle X,A_{\Omega Y}Z\rangle \tag{8}$$

симметричная.

2. Доказательство теоремы. Так как связности Леви-Чивита поверхностей плоские, то из (5) следует, что и нормальные связности плоские. В силу (2) матрицы $A_{\Omega Y_i}(\overline{A}_{X_i})$ коммутируют, следовательно, существует ортобазис X_i, ΩY_i ($i=1,2$) такой, что матрицы $A_{\Omega Y_i}$, $\overline{A}_{X_i}$ одновременно приводятся к диагональному виду.

$$A_{\Omega Y_m}X_i=k_{mi}X_i, \quad \overline{A}_{X_m}\Omega Y_i=\overline{k}_{mi}\Omega Y_i. \tag{9}$$

Имеем в силу (6), (7)

$$\langle \overline{A}_{X_m}\Omega Y_i,\Omega Y_j\rangle=\langle X_m,\overline{\alpha}(Y_i,Y_j)\rangle=$$
$$=-\langle A_{\Omega X_m}Y_i,Y_j\rangle=-\langle A_{\Omega Y_i}X_m,Y_j\rangle.$$

Откуда

$$\overline{k}_{mi}\delta_{ij}=-k_{im}\langle X_m,Y_j\rangle, \tag{10}$$

где δ_{ij} - тензор Кронекера. Имеем

$$k_{11}\langle X_1,Y_2\rangle=0,\ k_{12}\langle X_2,Y_2\rangle=0, \tag{11}$$
$$k_{21}\langle X_1,Y_1\rangle=0,\ k_{22}\langle X_2,Y_1\rangle=0. \tag{12}$$

Так как M, $\overline{\Gamma}$ имеют 2-мерные главные нормали (первые нормальные пространства, определяемые векторами $\alpha(X,Y)_p$, $\overline{\alpha}(X,Y)_p$, $p\in M$), то матрицы $A_{\Omega X_1}$, $A_{\Omega X_2}$ ненулевые. Нумерацию X_1, X_2 выберем так, что $k_{11}\neq 0$. Тогда из (11) получим

$$k_{12}=0,\ Y_2=\lambda_2X_2,\ \lambda_2\in F(M).$$

В (12) $k_{22}\neq 0$, в противном случае Y_1, Y_2 были бы коллинеарными, что противоречит условию, что ΩY_i - базисные. Итак,

$$k_{21}=0,\ Y_1=\lambda_1X_1,\ \lambda_1\in F(M).$$

Кроме того, из (10) получим

$$\overline{k}_{11} = -\lambda_1 k_{11}, \quad \overline{k}_{22} = -\lambda_2 k_{22}. \tag{13}$$

Тогда из (10) получим $\overline{k}_{mi}\delta_{ij} = -k_{im}\lambda_j\delta_{mi}$, откуда следует $\overline{k}_{12} = \overline{k}_{21} = 0$.

Таким образом,

$$A_{\Omega Y_1} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\Omega Y_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}_{X_1} = \begin{pmatrix} \overline{k}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_{X2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{k}_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через η, $\overline{\eta}$ векторы средних кривизн поверхностей M, $\overline{\Gamma}$. Имеем

$$\eta = \frac{1}{2}(k_{11}\Omega Y_1 + k_{22}\Omega Y_2), \quad \overline{\eta} = \frac{1}{2}(\overline{k}_{11}X_1 + \overline{k}_{22}X_2).$$

Используя (13), получим

$$\Omega\overline{\eta} = \frac{1}{2}(\overline{k}_{11}\Omega X_1 + \overline{k}_{22}\Omega X_2) = \frac{1}{2}(\overline{k}_{11}\frac{1}{\lambda_1}\Omega Y_1 + \overline{k}_{22}\frac{1}{\lambda_2}\Omega Y_2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(k_{11}\Omega Y_1 + k\Omega Y_2) = -\eta.$$

3. Примеры.

1) Поверхность M есть поверхность переноса $r=\rho_1(s_1)+\rho_2(s_2)$ в E^4, линии переноса γ_i: $\rho_i = \rho_i(s_i)$ (i=1,2) - плоские кривые, расположенные во взаимно ортогональных 2-плоскостях. Поверхность $\overline{\Gamma}$ - поверхность переноса, линии переноса $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_2$ которой - эволюты кривых γ_1, γ_2. Если s_i, k_i, $\{t_i,n_i\}$ - длина дуги, кривизна, репер Френе кривой γ_i, то

$$\overline{r} = \rho_1(s_1) + \frac{1}{k_1(s_1)}n_1 + \rho_2(s_2) + \frac{1}{k_2(s_2)}n_2.$$

$$T_p^{\perp}M = \{n_1(p), n_2(p)\}, \quad T_pM = \{t_1(p), t_2(p)\},$$

$$T_{f(p)}\overline{M} = \{n_1(p), n_2(p)\} = T_p^{\perp}M.$$

Поверхности имеют плоские связности и 2-мерные главные нормали.

$$\eta = -\Omega\overline{\eta} = -\frac{1}{2}(\frac{(k_1)^3}{k_1'}\overline{r}_1 + \frac{(k_2)^3}{k_2'}\overline{r}_2).$$

2) M - огибающая нормальных плоскостей кривой $\gamma\subset E^3$, e - единичный вектор, ортогональный E^3. Поверхность $\overline{\Gamma}$ - цилиндрическая с направляющей γ и образующей e. Обе поверхности имеют плоские связности, однако главные нормали их одномерные. Косинус угла φ между векторами η, $-\Omega\overline{\eta}$ равен [1]

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2}},$$

где κ, k - кручение и кривизна кривой γ.

Библиографический список

1. *Чешкова М.А.* Конформное соответствие ортогональных 2-поверхностей в E^4 // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 1995. N26. С.108-112.

2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.

3. *Чешкова М.А.* К геометрии пары ортогональных n-поверхностей в E_{2n} // Сибир. мат. журнал. 1995. N1. С.228-232.

M.A. C h e s h k o v a

ON A PROPERTY OF ORTHOGONAL SURFACE IN E^4

In a Euclidean space E^4 are considered two smooth 2-surfaces $M, \overline{M}$ and diffeomorphism $f:M \to \overline{M}$. The case is investigated, when tangent 2-planes in appropriate points $p \in M$, $f(p) \in \overline{M}$ are orthogonal. The mapping $\Omega: TM \to T^{\perp}M$, where $\Omega X = dfX$, $X \in TM$ is defined.

Theorem. If two orthogonal surfaces $M, \overline{M}$ in E^4 have flat connections and principal normals of surfaces $M, \overline{M}$ are 2-dimenstional, then $\eta = -\Omega\overline{\eta}$, where η, $\overline{\eta}$ - vectors of middle normals of surfaces M, $\overline{M}$.

УДК 514.75

ДВЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

В проективном пространстве рассмотрена неголономная поверхность или распределение плоскостей. Показано, что проективное пространство и распределение являются голономными гладкими многообразиями.

С распределением ассоциировано обобщенное расслоение линейных реперов. Применение способа Лаптева задания групповой связности к обобщенному расслоению привело к проективной связности классического типа. Выделен класс проективных связностей, названных каноническими. Оснащение распределения по Картану индуцирует каноническую проективную связность Лаптева.

Совершен переход от обобщенного расслоения к главному расслоению так называемых центролинейных реперов и соответствующей связности. Каноническая и центролинейная связности образуют два непересекающихся класса проективных связностей. Произведено композиционное оснащение распределения, состоящее в задании полей плоскостей Картана и нормалей 2-го рода. Доказано,