ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

О СЕТЯХ, ИНВАРИАНТНО СВЯЗАННЫХ С ПАРОЙ p-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

М.Н.Марюков

В данной работе рассматриваются некоторые свойства сетей, инвариантно связанных с парой p-распределений Δ_p и $\bar{\Delta}_p$, заданных в областях Ω и $\bar{\Omega}$ евклидова пространства E_n соответственно.

1. В пространстве E_n даны две области Ω и $\bar{\Omega}$ и диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar{\Omega}$. В области Ω задано распределение Δ_p, а в области $\bar{\Omega}$ – распределение $\tilde{\Delta}_p$ $(1\le p<n)$. В области Ω возьмем подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k=1,\dots,p;$ $\alpha,\beta,\gamma=p+1,\dots,n)$, где $\vec{e}_i\in\Delta_p(x)$, $\vec{e}_\alpha\in\Delta_{n-p}(x)$, а $\Delta_{n-p}(x)$ – площадка, ортогонально дополнительная к площадке $\Delta_p(x)$. В выбранном репере дифференциальные уравнения распределения Δ_p имеют вид

$$\omega_i^\alpha=\Lambda_{ik}^\alpha\omega^k, \tag{1}$$

а дифференциальные уравнения распределения Δ_{n-p} имеют вид

$$\omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha k}^i\omega^k, \tag{2}$$

где

$$\Lambda_{\alpha k}^i=-\gamma^{\ell j}\gamma_{\alpha\beta}\Lambda_{\ell k}^\beta. \tag{3}$$

Здесь $\gamma^{\ell j}$ – контравариантные компоненты метрического тензора распределения Δ_p, а $\gamma_{\alpha\beta}$ – ковариантные компоненты метрического тензора распределения Δ_{n-p}. Выбрав в области $\bar{\Omega}$ репер $\tilde{R}^y=\{y,\tilde{\vec{e}}_i,\tilde{\vec{e}}_\alpha\}$, где $y=f(x)$, $\tilde{\vec{e}}_i\in\tilde{\Delta}_p(y)$, $\tilde{\vec{e}}_\alpha\in\tilde{\Delta}_{n-p}(y)$, мы получим дифференциальные уравнения распределений $\tilde{\Delta}_p$ и $\tilde{\Delta}_{n-p}$, аналогичные уравнениям (1) и (2).

Пусть $R^y=f_{*x}(R^x)=\{y,\bar{\vec{e}}_i,\bar{\vec{e}}_\alpha\}$, где $\bar{\vec{e}}_i=f_{*x}(\vec{e}_i)$, $\bar{\vec{e}}_\alpha=f_{*x}(\vec{e}_\alpha)$. Рассмотрим репер $\tilde{R}^x=f_{*y}^{-1}(\tilde{R}^y)$. Здесь $\tilde{R}^x=\{x,\tilde{\bar{e}}_i,\tilde{\bar{e}}_\alpha\}$. Разлагая векторы $\bar{\vec{e}}_i,\bar{\vec{e}}_\alpha$ по базису $\{\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$, получим

$$\bar{\vec{e}}_i=\varphi_i^j\vec{e}_j+\varphi_i^\alpha\vec{e}_\alpha, \tag{4}$$

$$\bar{\vec{e}}_\alpha=\varphi_\alpha^i\vec{e}_i+\varphi_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \tag{5}$$

Аналогично, разлагая векторы $\tilde{\bar{e}}_i,\tilde{\bar{e}}_\alpha$ по базису $\{\bar{\vec{e}}_i,\bar{\vec{e}}_\alpha\}$, получим

$$\tilde{\bar{e}}_i=\psi_i^j\bar{\vec{e}}_j+\psi_i^\alpha\bar{\vec{e}}_\alpha, \tag{6}$$

$$\tilde{\bar{e}}=\psi_\alpha^i\bar{\vec{e}}_i+\psi_\alpha^\beta\bar{\vec{e}}_\beta. \tag{7}$$

Дифференцируя тождества (4) и (5) и учитывая тождества $\bar{\omega}_I^K-\omega_I^K=H_{IT}^K\omega^T$, где $H_{IT}^K=H_{TI}^K$ $(I,K,T=1,\dots,n)$, получим

$$d\varphi_i^j+\varphi_i^\ell\omega_\ell^j-\varphi_\ell^j\omega_i^\ell=(-\varphi_i^\alpha\Lambda_{\alpha T}^j+\varphi_\alpha^j\Lambda_{iT}^\alpha+\varphi_\ell^j H_{iT}^\ell+\varphi_\alpha^j H_{iT}^\alpha)\omega^T, \tag{8}$$

$$d\varphi_\beta^\alpha+\varphi_\beta^\gamma\omega_\gamma^\alpha-\varphi_\gamma^\alpha\omega_\beta^\gamma=(-\varphi_\beta^i\Lambda_{iT}^\alpha+\varphi_i^\alpha\Lambda_{\beta T}^i+\varphi_\gamma^\alpha H_{\beta T}^\gamma+\varphi_i^\alpha H_{\beta T}^i)\omega^T. \tag{9}$$

Обозначим $\delta=d|_{\omega^I=0}$; $\pi=\omega|_{\omega^I=0}$. Положив $\omega^I=0$, получим из (8) и (9)

$$\nabla_\delta\varphi_i^j=0, \tag{10}$$

$$\nabla_\delta\varphi_\alpha^\beta=0. \tag{11}$$

Можно проверить, что системы (10) и (11) вполне интегрируемы. Следовательно, системы величин $\{\varphi_i^j\}$ и $\{\varphi_\alpha^\beta\}$ в каждой точке $x\in\Omega$ образуют аффиноры, а в области Ω – аффинорное поле.

Будем предполагать, что каждый из указанных аффиноров имеет простой вещественный спектр. В этом случае в области Ω имеем p-ткань $\Sigma_p^f(\Delta_p)$ интегральных кривых 1-распределений, определяемых p полями собственных векторов аффинора $\{\varphi_i^j\}$, принадлежащую распределению Δ_p, и $(n-p)$-ткань $\Sigma_{n-p}^f(\Delta_p)$ интегральных кривых 1-распределений, определяемых $n-p$ полями собственных векторов аффинора $\{\varphi_\beta^\alpha\}$, принадлежащую распределению Δ_{n-p}. Следовательно, в области Ω имеем сеть, которую обозначим $\Sigma_n^f(\Delta_p)$, а в области $\bar{\Omega}$ – сеть $\tilde{\Sigma}_n^f(\tilde{\Delta}_p)$.

Рассмотрим для определенности сеть $\Sigma_n^f(\Delta_p)$. Все рассуждения, проводимые для этой сети, можно аналогичным образом провести для сети $\tilde{\Sigma}_n^f(\tilde{\Delta}_p)$. Поместим векторы $\vec{e}_i$, $\vec{e}_\alpha$ репера R^x на касательных к линиям сети $\Sigma_n^f(\Delta_p)$. В этом случае уравнения (7) и (8) дают $\omega_i^j=a_{iT}^j\omega^T$, $\omega_\alpha^\beta=a_{\beta T}^\alpha\omega^T$, где

$$a^j_{iT} = \frac{\varphi^j_j H^j_{iT} + \varphi^j_\alpha H^\alpha_{iT} - \varphi^\alpha_i \Lambda^j_{\alpha T} + \varphi^j_\alpha \Lambda^\alpha_{iT}}{\varphi^i_i - \varphi^j_j}, \qquad (12)$$

$$a^\alpha_{\beta T} = \frac{\varphi^\alpha_\alpha H^\alpha_{\beta T} + \varphi^\alpha_i H^i_{\beta T} - \varphi^i_\beta \Lambda^\alpha_{iT} + \varphi^\alpha_i \Lambda^i_{\beta T}}{\varphi^\beta_\beta - \varphi^\alpha_\alpha} \qquad (13)$$

$(i \neq j;\ \alpha \neq \beta)$. Присоединяя к уравнениям (12),(13) уравнения (1) и (2), получим полную систему дифференциальных уравнений сети $\Sigma^f_n(\Delta_p)$. С каждой линией ω^{i_0} нашей сети инвариантным образом связан вектор $\vec{e}_{i_0} = -\varphi^\alpha_{i_0} \Lambda^j_{\alpha i_0} \vec{e}_j$, а с линией ω^{α_0} — вектор $\vec{\ell}_{\alpha_0} = -\varphi^i_{\alpha_0} \Lambda^\beta_{i_0 \alpha_0} \vec{e}_\beta$. Пусть линия ω^{i_0} сети $\Sigma^f_n(\Delta_p)$ является характеристической и асимптотической на распределении Δ_p [2], т.е. $H^{\hat{j}}_{i_0 i_0} = 0$ $(\hat{j} = i_0)$, $H^\alpha_{i_0 i_0} = 0$ и $\Lambda^\alpha_{i_0 i_0} = 0$. Следовательно, $a^{\hat{j}}_{i_0 i_0} = 0$ тогда и только тогда, когда $0 = \varphi^\alpha_{i_0} \Lambda^{\hat{j}}_{\alpha i_0}$, т.е. $\vec{\ell}_{i_0} \parallel \vec{e}_{i_0}$. Условие $a^{\hat{j}}_{i_0 i_0} = 0$ в нашем случае означает, что линия ω^{i_0} является прямой. Следовательно, имеет место

Т е о р е м а 1. Если линия ω^{i_0} сети $\Sigma^f_n(\Delta_p)$ является асимптотической и характеристической, то она является прямой тогда и только тогда, когда $\vec{\ell}_{i_0} \parallel \vec{e}_{i_0}$.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение имеет место для линии ω^{α_0} и связанного с ней вектора $\vec{\ell}_{\alpha_0}$.

2. Уравнение $\omega^{i_0} = 0$ определяет гиперраспределение $\Delta^{i_0}_{n-1}$, построенное на $n-1$ полях касательных векторов к линиям сети $\Sigma^f_n(\Delta_p)$, за исключением ω^{i_0}. Дифференцируя 1-форму ω^{i_0} внешним образом, получим

$$\mathcal{D}\omega^{i_0} = a^{i_0}_{[\hat{j}\hat{k}]} \omega^{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{k}} + (a^{i_0}_{\hat{j}\beta} - \Lambda^{i_0}_{\beta\hat{j}})\, \omega^{\hat{j}} \wedge \omega^\beta + \Lambda^{i_0}_{[\alpha\beta]} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

Следовательно, уравнение $\omega^{i_0} = 0$ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $(i_0 \neq \hat{j}, \hat{k})$.

$$a^{i_0}_{[\hat{j}\hat{k}]} = 0, \quad a^{i_0}_{\hat{j}\beta} - \Lambda^{i_0}_{\beta\hat{j}} = 0, \quad \Lambda^{i_0}_{[\alpha\beta]} = 0. \qquad (14)$$

Аналогично уравнение $\omega^{\alpha_0} = 0$ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$a^{\alpha_0}_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]} = 0, \quad a^{\alpha_0}_{\hat{\beta} j} - \Lambda^{\alpha_0}_{j\hat{\beta}} = 0, \quad \Lambda^{\alpha_0}_{[ij]} = 0 \quad (\hat{\alpha}, \hat{\beta} \neq \alpha_0). \qquad (15)$$

Пусть сеть $\Sigma^f_n(\Delta_p)$ голономна [1], тогда из (14) и (15) получим $\Lambda^i_{[\alpha\beta]} = 0$, $a^i_{[jk]} = 0$ и $\Lambda^\alpha_{[ij]} = 0$, $a^\alpha_{[\beta\gamma]} = 0$ $(\alpha \neq \beta, \gamma)$, что означает, что ткани $\Sigma^f_p(\Delta_p)$ и $\Sigma^f_{n-p}(\Delta_p)$ голономны.

Если ткани $\Sigma^f_1(\Delta_p)$ и $\Sigma'^f_{n-p}(\Delta_p)$ голономны, то сеть $\Sigma^f_n(\Delta_p)$ голономна тогда и только тогда, когда $a^\alpha_{\beta j} - \Lambda^\alpha_{j\beta} = 0$, $a^i_{j\beta} - \Lambda^i_{\beta j} = 0$ $(i \neq j;\ \alpha \neq \beta)$. Найдем условие голономности тканей $\Sigma^f_p(\Delta_p)$ и $\Sigma^f_{n-p}(\Delta_{n-p})$. Из (12) следует, что

$$a^j_{ik}(\varphi^i_i - \varphi^j_j) = \varphi^j_j H^j_{ik} + \varphi^j_\alpha H^\alpha_{ik} - \varphi^\alpha_i \Lambda^j_{\alpha k} + \varphi^j_\alpha \Lambda^\alpha_{ik}.$$

Альтернируя это выражение по i,k, получим

$$\tfrac{1}{2}[a^j_{ik}(\varphi^i_i - \varphi^j_j) - a^j_{ki}(\varphi^k_k - \varphi^j_j)] = -\varphi^\alpha_{[i} \Lambda^j_{|\alpha|k]} + \varphi^j_\alpha \Lambda^\alpha_{[ik]}. \qquad (16)$$

а) Пусть ткань $\Sigma^f_p(\Delta_p)$ голономна, т.е. $\Lambda^{\alpha[ik]}_{[ik]} = 0$ и $a^j_{[ik]} = 0$ $(j \neq k, i)$. Из (16) следует при $i \neq k$

$$a^j_{ik} = -\varphi^\alpha_{[i} \Lambda^j_{|\alpha|k]} (\varphi^i_i - \varphi^k_k). \qquad (17)$$

б) Пусть распределение Δ_p голономно и выполнены соотношения (17), тогда $\Lambda^\alpha_{[ij]} = 0$, $a^j_{[ik]} = 0$, следовательно, p-ткань $\Sigma^f_p(\Delta_p)$ голономна.

Из а) и б) следует

Т е о р е м а 2. p-ткань $\Sigma^f_p(\Delta_p)$ голономна тогда и только тогда, когда распределение Δ_p голономно и выполнены соотношения (17).

З а м е ч а н и е. Аналогично, используя соотношения (13), найдем необходимое и достаточное условие голономности $(n-p)$-ткани $\Sigma^f_{n-p}(\Delta_p)$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве: Литовский матем. сб. / АН Лит ССР. - Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С. 475-490.

2. Ш и н к у н а с Ю.И. О распределениях m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве: Тр. Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. - М., 1974. Т.5. С.123-133.