5. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. Т. 9.

6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

7. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР. 1973. Т. 4. С. 71—120.

8. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937. №4. С. 147—159.

A. Khristoforova

DUAL SPACES OF AFFINE CONNECTION
ON THE DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS
IN THE SPACE OF AFFINE CONNECTION

The dual spaces of affine connection induced by the framed regular distribution *M* of hyperplane elements are found.

УДК 514.764.322

И. И. Цыганок, Е. С. Степанова

(*Российский университет кооперации, г. Владимир; Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва*)

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В СВЯЗНОСТИ ЧЕНЦОВА — АМАРИ

На многообразии распределений вероятностей в связности Ченцова — Амари найдены интегралы уравнений геодезических. В отличие от известного результата (см. [1, с. 199—201] эти интегралы получены непосредственным интегрированием уравнений геодезических линий. Приведенный в статье результаты был анонсирован в [2].

1. Определения. Каждое распределение вероятностей P на алгебре $\mathbf{S}_{n+1}$ всех подмножеств множества $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{n+1}\}$ всех исходов ω задается строкой $\mathrm{P} = (p_1, \dots, p_{n+1})$ вероятностей «атомов» $p_a = \mathrm{P}(\omega_a)$, где $a, b, c = 1, 2, \dots, n+1$, для распределения вероятностей $p_a \geq 0$ и $p_1 + \dots + p_{n+1} = 1$. При этом совокупность $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{O})$, состоящая из всех распределений вероятностей на $\mathbf{S}_{n+1}$, является n-мерным *многообразием распределений вероятностей* (см. [1, с. 27]). На многообразии $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{O})$ была построена (см. там же, с. 164—165) переопределенная система векторных полей $X_1, \dots, X_{n+1}$ для $X_a = p_a(1 - p_a)\dfrac{d}{dp_a}$ и с их помощью задана связность (см. там же, с. 193; [3, с. 96]): ${}^{\gamma}\nabla_{X_a} X_b = \gamma\left(\delta_{ab}X_b - p_a X_b - p_b X_a\right)$ для действительного параметра $\gamma > 0$ и $a, b = 1, \dots, n+1$. Было доказано также, что каждая геодезическая в этой связности ${}^{\gamma}\nabla$, соединяющая точку $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}(0)$ с точкой $\mathrm{P}_s = \mathrm{P}(s)$, представляет собою *экспотенциальное семейство* распределений вероятностей (см. [1, с. 200, 201]).

В [4] было установлено, что определенная в [1] связность Ченцова — Амари (см. [3, с. 96]) является эквиаффинной, присоединенной к n-форме объема $\theta = [\, p_1 \dots p_n p_{n+1}]^{1/2}$, и одновременно проективно плоской с коэффициентами ${}^{\gamma}\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \gamma\left[(\delta_{ij} - \bar{p}_i)\delta_j^k - \bar{p}_j \delta_i^k\right]$, найденными в локальном голономном базисе из n векторных полей $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$, выбранных из совокупности $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$.

2. Интегралы геодезических. Подставим значения ${}^{\gamma}\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ в уравнения геодезических линий связности Ченцова — Амари ${}^{\gamma}\nabla$

$$\frac{d^2\overline{p}_k}{ds^2}+{}^{\gamma}\overline{\Gamma}_{ij}^{k}\frac{d\overline{p}_i}{ds}\frac{d\overline{p}_j}{ds}=0,$$

где s — канонический параметр. В результате этой подстановки уравнения геодезических примут вид

$$\frac{d^2\overline{p}_k}{ds^2}+\gamma\frac{d\overline{p}_k}{ds}\left(\frac{d\overline{p}_k}{ds}-2\sum_{j=1}^{n}\overline{p}_j\frac{d\overline{p}_j}{ds}\right)=0$$

или им равносильный следующий вид:

$$\frac{d}{ds}\left(ln\left(\frac{dp_k}{ds}\right)+\gamma\left(p_k-\sum_{j=1}^{n}p_j^2\right)\right)=0.$$

Откуда последует, что

$$\ln\left(\frac{d\overline{p}_k}{ds}\right)+\gamma\left(\overline{p}_k-\sum_{j=1}^{n}\overline{p}_j^2\right)=C_{\gamma,k}, \qquad (1)$$

где $C_{\gamma,k}$ — не равные одновременно нулю постоянные интегрирования. Уравнения (1) можно представить так:

$$\ln\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d\,e^{\gamma\,\overline{p}_k}}{ds}\right)=C_{\gamma,k}+\gamma\sum_{j=1}^{n}\overline{p}_j^2,$$

что, в свою очередь, позволит выписать следующие тождества:

$$e^{C_{\gamma,j}}\cdot\frac{d\,e^{\gamma\,\overline{p}_i}}{ds}=e^{C_{\gamma,i}}\cdot\frac{d\,e^{\gamma\,\overline{p}_j}}{ds},$$

из которых, после их интегрирования, последуют равенства

$$\frac{e^{\gamma\,\overline{p}_1}+P_{\gamma,1}}{e^{C_{\gamma,1}}}=\frac{e^{\gamma\,\overline{p}_2}+P_{\gamma,2}}{e^{C_{\gamma,2}}}=\ldots=\frac{e^{\gamma\,\overline{p}_n}+P_{\gamma,n}}{e^{C_{\gamma,n}}}=\varphi_{\gamma},$$

где $\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(s)$ — гладкая функция и $P_{\gamma,k}$ — не равные одновременно нулю постоянные интегрирования. В результате интегралы уравнений геодезических получаем в следующем виде:

$$e^{\gamma\,\overline{p}_k} = \varphi_\gamma \cdot e^{C_{\gamma,k}} + P_{\gamma,k}\,. \tag{2}$$

Найдем, каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi_\gamma = \varphi_\gamma(s)$. Для этого сначала продифференцируем равенства (2), а затем полученные выражения прологарифмируем, в итоге будем иметь

$$\gamma\,\overline{p}_k + \ln\gamma + \ln\frac{d\,\overline{p}_k}{ds} = \ln\frac{d\varphi_\gamma}{ds} + C_{\gamma,k}\,.$$

Найдем отсюда выражение $\ln\dfrac{d\,\overline{p}_k}{ds}$ и подставим его в уравнения (1), получим $\dfrac{d\varphi_\gamma}{ds} = \gamma\, e^{\overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2+\ldots+\overline{p}_n^2}$, откуда последует $\varphi_\gamma = \gamma\int e^{\overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2+\ldots+\overline{p}_n^2}ds$. Доказана

Теорема. *Пусть* $\mathrm{Caph}(\Omega, \mathbf{S}_{n+1}, \mathbf{O})$ — *многообразие распределений вероятностей со связностью Ченцова — Амари* ${}^{\gamma}\nabla$, *чьи коэффициенты в локальном голономном базисе из* n *векторных полей* $\overline{X}_k = \overline{p}_k(1-\overline{p}_k)\dfrac{d}{d\,\overline{p}_k}$ *имеют вид* ${}^{\gamma}\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \gamma\left[(\delta_{ij}-\overline{p}_i)\delta_j^k - \overline{p}_j\delta_i^k\right]$. *Тогда интегралы уравнений геодезических линий* $\dfrac{d^2\overline{p}_k}{ds^2} + {}^{\gamma}\overline{\Gamma}_{ij}^{k}\dfrac{d\overline{p}_i}{ds}\dfrac{d\overline{p}_j}{ds} = 0$ *определяются из равенств* $e^{\gamma\,\overline{p}_k} = \varphi_\gamma \cdot e^{C_{\gamma,k}} + P_{\gamma,k}$ *для постоянных* $C_{\gamma,k}$ *и* $P_{\gamma,k}$ *и функции* φ_γ, *удовлетворяющей условию* $\varphi_\gamma = \gamma\int e^{\overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2+\ldots+\overline{p}_n^2}ds$.

Список литературы

1. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., 1972.

2. *Степанова Е. С., Цыганок И. И.* Геодезические линии в связности Ченцова — Амари // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе». Одесса, 2008. С. 141—145.

3. *Арнольд В. И. и др.* Николай Николаевич Ченцов // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, вып. 2. С. 165—168.

4. *Степанова Е. С., Степанов С. Е., Шандра И. Г.* Сопряженные связности на статистических многообразиях // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 90—98.

I. Tsyganok, E. Stepanova

INTEGRALS OF EQUATIONS OF GEODESIC LINES
IN THE CHENTSOV — AMARY CONNECTION

We have deduced integrals of equations of geodesic lines in the Chentsov — Amary connection on a statistic manifold.

УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ РИБОКУРА КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРСФЕР

Изучается конгруэнция гиперсфер. По известной гиперповерхности центров гиперсфер строится функция радиусов так, чтобы конгруэнция гиперсфер была рибокуровой.

В евклидовом пространстве E^n рассмотрим $(n-1)$-параметрическое семейство гиперсфер — конгруэнцию гиперсфер [6, с. 459; 3]. Пусть M — гладкая гиперповерхность, описы-