

А. В. Асташенок, А. С. Тепляков

О ВОЗМОЖНЫХ ПРОЯВЛЕНИЯХ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ИЗЛУЧЕНИЯ ХОКИНГА В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.

Рецензия от 21.05.2021 г.

На основании рассмотренной аналогии между солитонами и черными дырами сделано предположение о существовании в нелинейной оптике эффекта квантового излучения Хокинга, приводящего, в частности, к уменьшению энергии солитонов самоиндуцированной прозрачности.

The analogy between solitons and black holes is considered for self-induced transparency. In nonlinear optics Hawking radiation can exist. This effect in particular leads to decreasing of soliton energy with time.

Ключевые слова: нелинейная оптика, черные дыры, солитоны, температура Хокинга, уравнение синус-Гордона, самоиндуцированная прозрачность

Keywords: nonlinear optics, black holes, solitons, Hawking temperature, sine-Gordon equation, self-induced transparency

Введение

В 1976 г. А. Салам и Д. Стратди обнаружили связь между общей теорией относительности Эйнштейна и теорией нелинейных эволюционных уравнений [1]. Их гипотеза состояла в том, что черная дыра есть не что иное, как солитон. Эта идея была развита в 1978 г. Захаровым и Белинским, которые впервые показали, что существуют солитонные решения уравнений Эйнштейна в двух измерениях, которые можно найти с помощью метода обратной задачи рассеяния [2].

Уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, можно записать в виде следующего условия на некоторую матричную функцию \mathbf{w} :

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{U}\mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_t = \mathbf{V}\mathbf{w}, \quad (1)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} — так называемые матрицы AKNS [3].

Приравнивание смешанных частных производных и использование того, что \mathbf{w} является обратимой матрицей, дает условие совместности, которое принимает форму уравнения для матриц 2×2 и называется условием нулевой кривизны:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{0}. \quad (2)$$



Решения для черных дыр в общей теории относительности могут быть полностью охарактеризованы только тремя наблюдаемыми классическими параметрами (массой, электрическим зарядом и угловым моментом). Это напоминает и структуру солитонов, поскольку свойства последних определяются, как правило, небольшим количеством параметров.

Черные дыры, как известно, способны излучать квантово-механическую энергию, характеризующуюся так называемой температурой Хокинга [4]. Большое количество литературы [5–7] посвящено возможному обнаружению излучения Хокинга в классических или полуклассических аналоговых системах (обычно оптических, гидродинамических или основанных на квантовых конденсатах) из-за значительной трудности обнаружения его в астрофизических условиях. В свете гипотезы Салама и Стратди об эквивалентности солитонов и черных дыр можно ожидать, что точный аналог излучения Хокинга существует в физике солитонов.

В работе [8] показано, что любое солитонное решение двумерного интегрируемого нелинейного эволюционного уравнения потенциально обладает температурой Хокинга, которая определяется исключительно геометрическими свойствами внутренней поверхности, связанной с конкретным солитоном, называемой интегрируемой поверхностью. Кривизна этой поверхности уменьшается за счет излучения Хокинга.

Метрический тензор, связанный с солитонной поверхностью, вычисляется по формуле [9; 10]:

$$g_{\mu\nu} \equiv \alpha \text{Tr}(\partial_\lambda \hat{g}_\mu \partial_\lambda \hat{g}_\nu). \quad (3)$$

Здесь $\hat{g}_1 = \mathbf{U}$, $\hat{g}_0 = \mathbf{V}$ – матрицы AKNS, а производная берется по собственному значению λ , Tr – след матрицы. Линейным элементом для этой метрики является $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, причем индексы μ, ν пробегают значения 0 и 1. Постоянный множитель α перед выражением обусловлен нормировкой генераторов рассматриваемой группы симметрии. Для группы симметрии $SU(2)$ $\alpha = -2$.

Удобно использовать метрику типа Шварцшильда для черных дыр в двух измерениях:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2, \quad (4)$$

где r и t – две координаты Шварцшильда, а $f(r)$ – некоторая функция, зависящая только от r .

Для преобразования координат, приводящего к метрике типа Шварцшильда, следует использовать общий метод, применимый в двух измерениях [11]. Решая так называемое уравнение Лапласа – Бельтрами, всегда можно найти преобразование координат, ведущее к конформной метрике, а затем перейти от так называемой черепашьей координаты к обычной, что в итоге и приведет к метрике типа Шварцшильда.



В случае если метрика (4) имеет горизонт событий (это означает, что функция $f(r) = 0$ при некотором $r = r_H$), температура горизонта находится по формуле

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k_B c} \Sigma, \quad \Sigma = -\frac{c^2}{2} \frac{df(r_H)}{dr}. \quad (5)$$

В (5) \hbar — постоянная Планка, k_B — постоянная Больцмана, c — скорость света.

Самоиндуцированная прозрачность и солитон уравнения синус-Гордона

В 1967 г. МакКолл и Хан при изучении прохождения ультракоротких импульсов (УКИ — импульсы короче 100 пикосекунд) рубинового лазера через рубиновый стержень обнаружили, что при определенных условиях электромагнитный импульс проходит через резонансно поглощающую среду без потерь энергии. Это явление получило название самоиндуцированной прозрачности (СИП) [12]. Длительность импульса должна быть значительно меньше времен релаксации поляризации среды и разности населенностей резонансных уровней. Тогда все атомы синфазно реагируют на действие электрического поля импульса и происходят только поглощение и вынужденное испускание. При достаточно большой амплитуде импульса все атомы сначала переходят в возбужденное состояние, а затем — в основное, возвращая поглощенную энергию за счет вынужденного излучения обратно в импульс.

В случае УКИ обычно рассматривают квазигармоническую волну, то есть считают, что электрическое поле волны, распространяющейся вдоль оси Z , можно представить как поле гармонической волны E , но с переменной амплитудой и фазой

$$E(z, t) = 2A(z, t) \cos[k_0 z - \omega_h t + \varphi(z, t)], \quad (6)$$

где ω_h — частота гармонической волны, k_0 — соответствующее ей волновое число. Вещественные огибающая $A(z, t)$ и фаза $\varphi(z, t)$ предполагаются медленно меняющимися в пространстве и времени функциями:

$$|A_t| = \omega_h |A|, \quad |A_z| = k_0 |A|, \quad (7)$$

$$|\varphi_t| = \omega_h |\varphi|, \quad |\varphi_z| = k_0 |\varphi|. \quad (8)$$

Кроме того, амплитуда УКИ так мала, что мгновенная частота Раби $d \max(A) / \hbar$ (d здесь — дипольный момент перехода между основным и возбужденным уровнями) много меньше частоты резонансного перехода ω_0 . В приближении медленно меняющейся вещественной огибающей импульса и в отсутствие фазовой модуляции справедлива система уравнений СИП:



$$\begin{aligned}
 e_z + \frac{1}{c}e_t &= -\alpha'\langle p \rangle, \\
 q_t &= \Delta\omega p, \\
 p_t &= -\Delta\omega q + er, \\
 r_t &= -ep.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Здесь $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_h$ — отстройка от резонанса, $\alpha' = 2\pi N d^2 \omega h / \hbar c$, $e = dA / 2\hbar$ — нормированная огибающая импульса, N — концентрация резонансных атомов. Величины p , q , r связаны с компонентами вектора Блоха s_1 , s_2 , s_3 соотношениями

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -p(z, t) \sin[k_0 z - \omega_h t + \varphi(z, t)] + q(z, t) \cos[k_0 z - \omega_h t + \varphi(z, t)], \\
 s_3 &= -r(z, t).
 \end{aligned}$$

Квадратные скобки в первых двух уравнениях системы означают усреднение по всем дипольным моментам атомов. В данном случае усреднение производится при помощи формулы

$$\langle p \rangle = \int g(\Delta\omega) p(t, z; \Delta\omega) d\Delta\omega.$$

Здесь $g(\Delta\omega)$ — так называемая функция распределения расстройек, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d\Delta\omega = 1.$$

Если отстройка от резонанса равна нулю, то решение уравнений находится элементарно (в качестве начальных условий принимается, что атомы пребывают в основном состоянии):

$$q(t, z; 0) = 0, \quad p(t, z; 0) = -\sin u, \quad r(t, z; 0) = -\cos u, \tag{10}$$

где

$$u = \int_{-\infty}^t e(t, z) dt.$$

Если отстройка от резонанса не равна нулю, то можно предположить, что справедлива простая факторизация, а именно

$$p(t, z; \Delta\omega) = p(t, z; 0) F(\Delta\omega), \tag{11}$$

где $F(\Delta\omega)$ — спектральная функция отклика. Уравнение для r при таком предположении тоже интегрируется:

$$r(t, z; \Delta\omega) = -F(\Delta\omega) \cos u + F(\Delta\omega) - 1. \tag{12}$$



Используя уравнения для q и p , можно получить уравнение для функции u в следующем виде:

$$u_{tt} = \frac{\Delta\omega^2 F(\Delta\omega)}{1 - F(\Delta\omega)} \sin u. \quad (13)$$

Логично предположить, что коэффициент при синусе не должен зависеть от $\Delta\omega$, так как u не зависит от расстройки. Обозначим

$$\frac{\Delta\omega^2 F(\Delta\omega)}{1 - F(\Delta\omega)} = \frac{1}{\tau_p^2} \rightarrow F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\tau_p)^2}.$$

Используя уравнение для огибающей, получаем уравнение для функции u :

$$u_{tz} + \frac{1}{c} u_{tt} = -\alpha' \sin u \int \frac{g(\Delta\omega)}{1 + (\Delta\omega\tau_p)^2} d\Delta\omega. \quad (14)$$

В простейшем случае точного резонанса и однородного уширения, центрированного на атомной частоте, можно положить в пределе, что

$$g(\Delta\omega) = \delta(\Delta\omega).$$

Интегрирование и последующая замена переменных приводят к уравнению синус-Гордона в виде

$$u_{z\tau} + \alpha' \sin u = 0, \quad (15)$$

где $\tau = t - z/c$. Это уравнение имеет решение в виде кинка

$$u = 4 \arctan \exp\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right) = 4 \arctan \exp\left(\frac{\tau - \alpha' z \tau_p^2}{\tau_p}\right), \quad (16)$$

скорость которого равна

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \alpha' \tau_p^2.$$

Простой заменой переменных

$$t = \tau + z/c, \quad x = z - c\tau$$

уравнение синус-Гордона (15) сводится к канонической форме

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = -\frac{\alpha'}{c} \sin u \quad (17)$$

с соответствующим солитонным решением

$$u(x, t) = 4 \arctan \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\alpha'}{c}} \gamma (-x + Vt) \right) \right), \quad \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \quad (18)$$



Сопоставив эти решения, получим, что параметр β — отношение V/c — связан с характерной длительностью солитона СИП следующим образом:

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{1 - c\alpha'\tau_p^2}{1 + c\alpha'\tau_p^2}. \quad (19)$$

Полезно также выразить τ_p через β :

$$\tau_p = \frac{1}{(c\alpha')^{1/2}} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}. \quad (20)$$

108

Температура Хокинга для солитона синус-Гордона

Для уравнения синус-Гордона, записанного в форме

$$u_{tt} - u_{xx} = -\sin u, \quad (21)$$

матрицы AKNS имеют следующий вид:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -i\lambda & -u_x/2 \\ u_x/2 & i\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

Использование уравнения (3) дает метрику для солитонной поверхности:

$$ds^2 = \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) dt^2 + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) dx^2 \quad (22)$$

Заметим, что эта метрика не инвариантна относительно преобразований Лоренца и не приводит к метрике типа Шварцшильда. Можно получить метрику типа Минковского, выполнив поворот Вика $t \rightarrow it$, который приводит к эллиптическому уравнению синус-Гордона

$$u_{xx} + u_{t't'} = \sin u \quad (23)$$

и соответствующей метрике

$$ds^2 = -\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) dt'^2 + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) dx^2. \quad (24)$$

Далее опустим для краткости штрих у переменной t . Если в солитонном решении

$$u = 4\arctan(\exp(\gamma(-x + \beta t)))$$

положить $\gamma = (1 + \beta^2)^{-1/2}$, то такое решение будет решением эллиптического уравнения синус-Гордона (23) [13]. Для солитонного решения метрика примет вид

$$ds^2 = -\cosh^{-2}(\gamma(\beta t - x)) dt^2 + \tanh^2(\gamma(\beta t - x)) dx^2. \quad (25)$$



Приведем метрику к шварцшильдовской форме. Для этого введем новую координату $x = -\rho/\gamma + \beta t$ в метрику, тогда в координатах (t, ρ) метрика станет недиагональной:

$$ds^2 = \frac{\tanh^2 \rho}{\gamma^2} d\rho^2 + 2 \frac{\beta}{\gamma} \tanh^2 \rho d\rho dt + (-\operatorname{sech}^2 \rho + \beta^2 \tanh^2 \rho) dt^2. \quad (26)$$

Введем новые координаты $\eta(t, \rho)$ и $\xi(t, \rho)$. Для того чтобы метрика в новых координатах была конформной, необходимо, чтобы функции η и ξ удовлетворяли уравнениям

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (-g)^{1/2} \left(g^{\rho t} \frac{\partial \xi}{\partial t} + g^{\rho \rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right), \quad (27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -(-g)^{1/2} \left(g^{tt} \frac{\partial \xi}{\partial t} + g^{t\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right). \quad (28)$$

Вычислив элементы обратного метрического тензора g^{ab} , определитель метрики g для (26) и положив, что функция ξ зависит только от t , можно получить

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\gamma(1 - \beta^2 \sinh^2 \rho)}{\sinh \rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\beta \sinh \rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho}. \quad (29)$$

Дифференцируем первое уравнение по t , второе по ρ . Складывая, получим, что

$$\frac{\gamma(1 - \beta^2 \sinh^2 \rho)}{\sinh \rho} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \text{const}. \quad (30)$$

Положим постоянную равной 1 и выразим $\partial r / \partial \rho$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\sinh \rho}{\gamma(1 - \beta^2 \sinh^2 \rho)}. \quad (31)$$

Подставим обратно в систему уравнений и получим выражения для частных производных η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{\beta \sinh^2 \rho}{\gamma(1 - \beta^2 \sinh^2 \rho)} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 1.$$

В координатах (η, ξ) метрика примет конформный вид

$$ds^2 = (-\operatorname{sech}^2 \rho + \beta^2 \tanh^2 \rho)(-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (33)$$



Горизонт событий соответствует решению уравнения $g_{\eta\eta}=0$, то есть

$$\rho_H = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (34)$$

В естественной системе единиц температура Хокинга дается выражением

$$T_H = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g^{\xi\xi}}{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial g_{\eta\eta}}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=\xi_H}. \quad (35)$$

110

Необязательно выражать элементы метрического тензора через переменную ξ , можно воспользоваться тем, что

$$\frac{\partial g_{\eta\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial g_{\eta\eta}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi},$$

где выражение для $\partial\rho/\partial\xi$ следует взять из (31). В итоге для температуры Хокинга на горизонте получим

$$T_H = \frac{\beta}{2\pi}. \quad (36)$$

При переходе к физическим единицам это выражение следует умножить на $\hbar c/k_B$, а также учесть множитель $(a'/c)^{1/2}$, имеющий размерность обратной длины и появляющийся при дифференцировании элемента метрики по пространственной координате:

$$T_H = \frac{\beta \hbar c}{2\pi k_B} \left(\frac{a'}{c}\right)^{1/2}. \quad (37)$$

Найдем характерное время, за которое могут проявиться квантовые эффекты в случае солитона СИП. Для того чтобы найти потери энергии солитоном, следует использовать закон Стефана – Больцмана для двух измерений. Полная мощность, излучаемая абсолютно черным телом, определяется как [14]

$$P = A_1 \sigma_1 T_H^2, \quad (38)$$

где $A_1=1$ – это 1-мерная «площадь» черной дыры, а σ_1 – постоянная Стефана – Больцмана для одного пространственного измерения:

$$\sigma_1 = \frac{\pi k_B^2}{6\hbar}.$$



Следовательно,

$$P = \frac{\pi k_B^2}{6\hbar} T_H^2 = \frac{\hbar c^2 \alpha'}{24\pi} \beta^2. \quad (39)$$

Далее вспомним уравнение Клейна – Гордона – Фока в размерных единицах:

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} u = 0. \quad (40)$$

Сравнивая коэффициенты перед u и $\sin u$ в уравнении (17), можно выразить «массу» солитона:

$$m = \frac{\hbar}{c} (\alpha'/c)^{1/2}.$$

Тогда энергия, которую следует сопоставить солитону СИП, будет равна

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\sqrt{\alpha'c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (41)$$

Закон Стефана – Больцмана для нашего случая дает, что

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{c}{24\pi} \sqrt{\frac{\alpha'}{c}} \beta^2. \quad (42)$$

После элементарного интегрирования получаем выражение для параметра β в виде неявной функции времени:

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right) \Big|_{\beta_0}^{\beta} = t/t_s, \quad (43)$$

где t_s – характерный масштаб времени, равный

$$t_s = \frac{24\pi}{(\alpha'c)^{1/2}}.$$

Для построения зависимости характерной длительности импульса t_p от t воспользуемся соотношением (20). Заметим, что из уравнения (19) следует, что для солитонов с длительность, большей, чем $(\alpha'c)^{-1/2}$, параметр β отрицателен. Это означает отрицательную термодинамическую температуру и отсутствие излучения Хокинга. Длительность (то есть характерная ширина) импульсов короче этого предельного значения растет со временем. На рисунках 1, 2 приведены графики зависимости характерной длительности импульса и пройденного солитоном расстояния от времени.

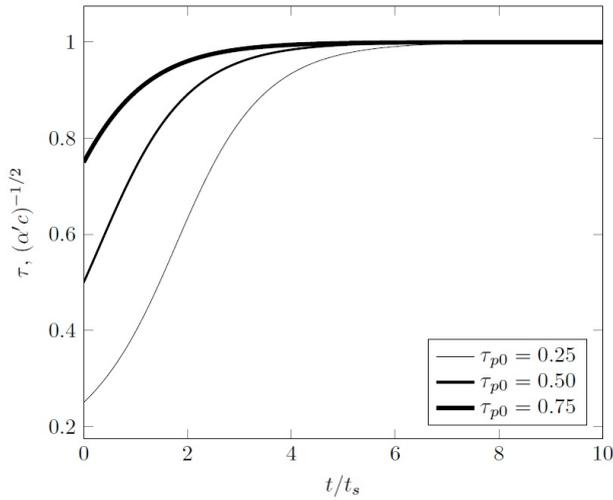


Рис. 1. Зависимость характерной длительности импульса СИП от времени при различных начальных значениях τ_p (в единицах $(\alpha'c)^{-1/2}$).
Время дано в единицах t_s

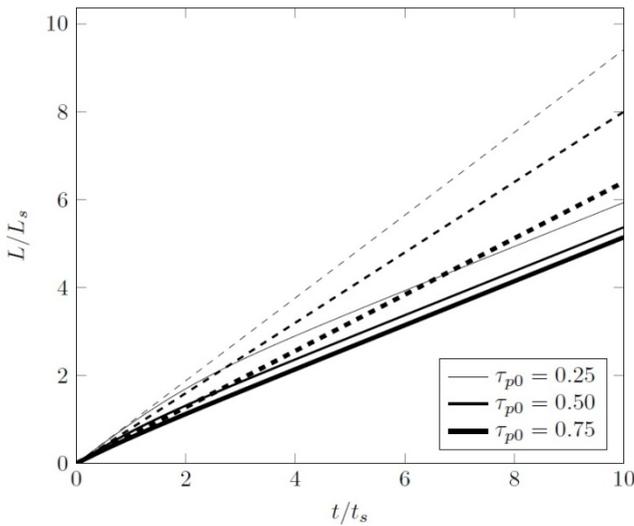


Рис. 2. Зависимость пройденного солитонем расстояния от времени при различных начальных значениях τ_p . Расстояние дано в единицах $L_s = ct_s$.
Пунктирные линии соответствующей толщины отвечают отсутствию хокинговского излучения

Для нормированной огибающей напряженности электрического поля e имеем выражение

$$e = \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_p} \right). \quad (44)$$



На рисунке 3 изображены профили огибающей в различные моменты времени в зависимости от различных начальных значений τ_p . Солитоны замедляются, а их амплитуда становится меньше.

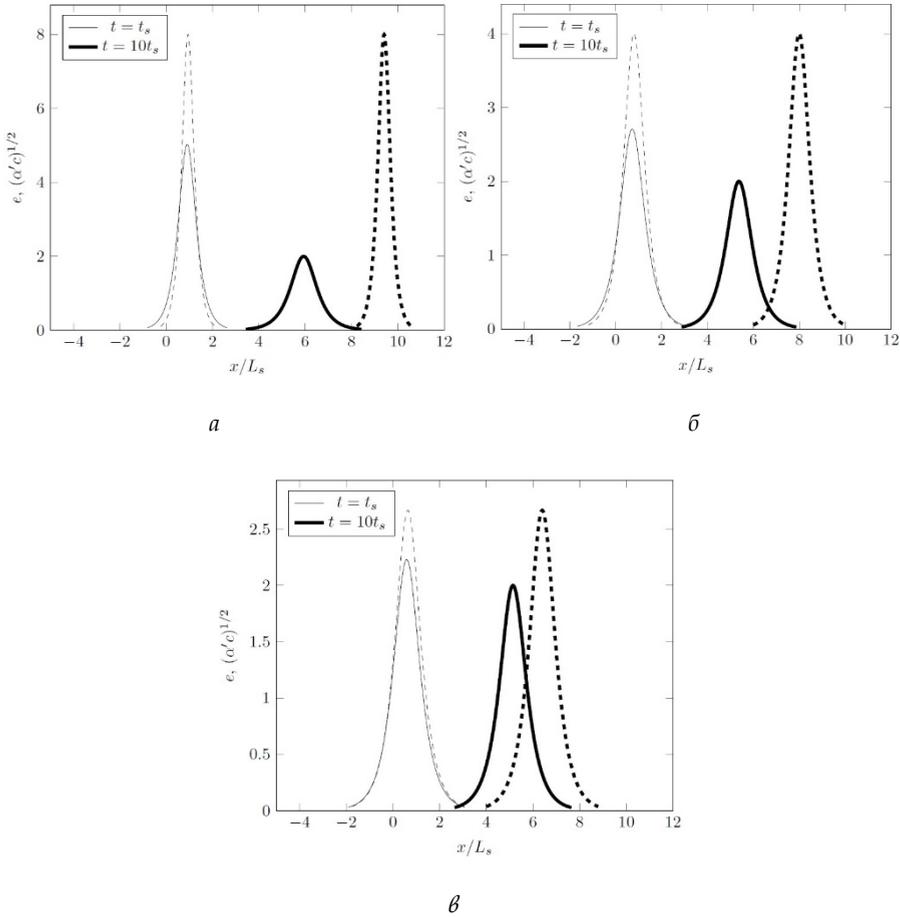


Рис. 3. Профили солитонов СИП (44) в разные моменты времени для различных начальных значений τ_p :

a — при $\tau_p=0,25$; *б* — при $\tau_p=0,5$; *в* — при $\tau_p=0,75$. Пунктирными линиями изображены профили в отсутствие эффекта хокинговского излучения.

Заключение

Наше рассмотрение аналога излучения Хокинга в случае солитонов самоиндуцированной прозрачности указывает на возможность наблюдения данного явления в реальном эксперименте. Характерное время изменения амплитуды солитона на 2–3 порядка больше длительности импульса. Конечно, остаются трудности с тем, что солитон СИП затухает и по причине других эффектов (неоднородность среды, неидеальность самого импульса и т. д.).



Список литературы

1. Salam A., Strathdee J. Hadronic Temperature and Black Solitons // Phys. Lett. B. 1977. Vol. 66. P. 143–146.
2. Belinskii V.A., Zakharov V.E. Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions // JETP. 1978. Vol. 48. P. 985–994.
3. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems // Stud. Appl. Math. 1974. Vol. 53. P. 249–315.
4. Hawking S.W. Particle creation by black holes // Comm. Math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199–220.
5. Belgiorno F., Cacciatori S.L., Clerici M. et al. Hawking Radiation from Ultrashort Laser Pulse Filaments // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105. P. 203901.
6. Bermudez D., Leonhardt U. Hawking spectrum for a fiber-optical analog of the event horizon // Phys. Rev. A. 2016. Vol. 93. P. 053820 (1–13).
7. Steinhauer J. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole // Nat. Phys. 2016. Vol. 12. P. 959–965.
8. Robson C.W., Di Mauro Villari L., Biancalana F. Universal quantum Hawking evaporation of integrable two-dimensional solitons // New J. Phys. 2019. Vol. 21. P. 053042.
9. Lund F., Regge T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14. P. 1524–1535.
10. Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints // Comm. Math. Phys. 1976. Vol. 46. P. 207–221.
11. Chandrasekar S. The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford, 1992.
12. McCall S.L., Hahn E.L. Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18. P. 908–911.
13. Di Mauro Villari L., Marcucci G., Braidotti M.Ch., Conti C. Sine-Gordon soliton as a model for Hawking radiation of moving black holes and quantum soliton evaporation // J. Phys. Commun. 2018. Vol. 2. P. 055016 (1–12).
14. Landsberg P.T., De Vos A. The Stefan-Boltzmann constant in n-dimensional space // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. Vol. 22. P. 1073–1084.

Об авторах

Артем Валерьевич Асташенок — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: aastashenok@kantiana.ru

Александр Сергеевич Тепляков — магистрант, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: ateplyakov@kantiana.ru

The authors

Prof. Artyom V. Astashenok, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: aastashenok@kantiana.ru

Alexander S. Teplyakov, Master's Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: ateplyakov@kantiana.ru