6. *Близникас В. И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский мат. сб. 1966. Т. 6, №2. С. 141—209.

7. *Шевченко Ю. И.* Связность в составном многообразии и ее продолжение // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1992. Вып. 23. С. 110—118.

K. Polyakova, Yu. Shevchenko

Laptev — Lumiste′s methods of giving connection and geometrical vectors

Two modes for the giving fundamental-group connection in a principal bundle are described: Laptev — Lumiste′s method by means of connection forms and dual method by means of horizontal vectors. Universality of the first method in comparison with the second one is shown.

УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Нормальные связности касательно r-оснащенной гиперполосы $H_m(\Lambda)$ аффинного пространства

Дано задание нормальных центроаффинных связностей гиперполосы $H_m(\Lambda)$ и ее Λ-, L-подрасслоений, а также внутренней (касательной) аффинной связности гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Построены тензоры кривизны этих связностей.

Ключевые слова: гиперполоса, связность, расслоение, тензор кривизны.

Схема использования индексов:

$$I,J,K=\overline{1,n};\ i,j,k,l=\overline{1,m};\ p,q,t=\overline{1,r};\ a,b,c=\overline{r+1,m};$$

$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n};\ A,B=\{a;\alpha\};$$

$$P,Q=\{p,\alpha\};\ \hat{A},\hat{B}=\{a,\alpha,n\};\ \hat{P},\hat{Q}=\{p,\alpha,n\};\ \text{s}=\text{m}-\text{r}.$$

Оператор дифференцирования ∇ действует по закону

$$\nabla T^{qb\alpha}_{pa\beta n} = dT^{qb\alpha}_{pa\beta n} - T^{qb\alpha}_{ta\beta n}\omega^t_p - T^{qb\alpha}_{pc\beta n}\omega^c_a - T^{qb\alpha}_{pa\gamma n}\omega^\gamma_\beta +$$
$$+T^{tb\alpha}_{pa\beta n}\omega^q_t + T^{qc\alpha}_{pa\beta n}\omega^b_c + T^{qb\gamma}_{pa\beta n}\omega^\alpha_\gamma - T^{qb\alpha}_{pa\beta n}\omega^n_n.$$

1. В n-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрим m-мерную регулярную гиперполосу $H_m(\Lambda)$ [1; 2]. Пусть гиперполоса $H_m(\Lambda)$ оснащена полем r-мерных касательных плоскостей Λ (Λ-подрасслоение) [3] (здесь $r < m < n$). Поле Λ-плоскостей порождает сопряженное ему поле касательных (m–r)-мерных плоскостей L (L-подрасслоения) относительно асимптотического пучка тензоров $b^{\hat\alpha}_{ij}$ базисной поверхности V_m гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Известно [5], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскостей $\Lambda(A)$ и $L(A)$ является обращение в нуль тензора $\{b^{\hat\alpha}_{pa}\}$, т.е.

$$b^{\hat\alpha}_{pa} = 0 \vee b^{\hat\alpha}_{ap} = 0. \tag{1}$$

Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R = \{M, \bar e_J\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\overline{M} = \omega^I \bar e_I, \quad d\bar e_I = \omega^K_I \bar e_K. \tag{2}$$

Инвариантные формы ω^I, ω^K_I аффинной группы удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^K_I = \omega^L_I \wedge \omega^K_L, \; d\omega^I = \omega^L \wedge \omega^I_L. \tag{3}$$

Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности V_m. Пусть $\{\bar e_p\} \subset \Lambda(A)$, $\{\bar e_a\} \subset L(A)$, $\{\bar e_\alpha\} \subset E(A)$, где (n–m–1)-плоскость E(A) является характеристикой гиперполосы $H_m(\Lambda)$ [2; 3]. Канонизированный таким образом репер есть репер 1-го порядка. Нами показано [5], с учетом соотношений (1)—(3), что в репере R^1 гиперполоса $H_m(\Lambda) \subset A_n$ задается уравнениями

$$\omega^n = 0, \omega^\alpha = 0,\ \omega_\alpha^n = 0,\ \omega_p^n = b_{pq}^n \omega^q,\ \omega_a^n = b_{ab}^n \omega^b,$$
$$\omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^q,\ \omega_a^\alpha = b_{ab}^\alpha \omega^b,\ \omega_p^a = \lambda_{pi}^a \omega^i, \tag{4}$$
$$\omega_a^p = \lambda_{ai}^p \omega^i,\ \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a \omega^i,\ \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha i}^p \omega^i,$$

$$\nabla b_{pq}^n = b_{pqi}^n \omega^i,\ \nabla b_{ab}^n = b_{abi}^n \omega^i, \nabla b_{pq}^\alpha + b_{pq}^n\, \omega_n^\alpha = b_{pqi}^\alpha \omega^i,$$
$$\nabla b_{ab}^\alpha + b_{ab}^n\, \omega_n^\alpha = b_{abi}^\alpha \omega^i,\ \nabla \lambda_{pi}^a + \lambda_{pq}^n\, \delta_i^q \omega_n^a = \lambda_{pij}^a \omega^j, \tag{5}$$
$$\nabla \lambda_{ai}^p + b_{ac}^n\, \delta_i^c \omega_n^p = \lambda_{aij}^p \omega^j,\ \nabla \lambda_{\alpha i}^a = \lambda_{\alpha ij}^a \omega^i,\ \nabla \lambda_{\alpha i}^p = \lambda_{\alpha ij}^p \omega^i$$

и соотношениями

$$b_{[pq]}^{\hat\alpha} = 0,\ b_{[ab]}^{\hat\alpha} = 0,\ \lambda_{\alpha[i}^k b_{j]k}^n = 0,$$
$$b_{pq}^n \lambda_{[ab]}^q = b_{p[a}^c b_{b]c}^n,\ b_{ac}^n b_{[pq]}^c = \lambda_{a[p}^t b_{q]t}^n, \tag{6}$$
$$b_{pq}^\alpha \lambda_{[ab]}^q = b_{p[a}^c b_{b]c}^\alpha,\ b_{ac}^\alpha b_{[pq]}^c = \lambda_{a[p}^t b_{q]t}^\alpha.$$

2. Адаптируем репер R^1 полю нормалей N(A) 1-го рода гиперполосы $H_m(\Lambda)$, выбирая вектор $\overline{e}_n \parallel N(A)$. В этом случае

$$\omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i,\ \omega_n^p = \lambda_{ni}^p \omega^i, \omega_n^a = \lambda_{ni}^a \omega^i, \tag{7}$$

а поле нормалей 1-го рода N(A) определяется уравнениями

$$\nabla \lambda_{ni}^p = \lambda_{nij}^p \omega^j,\ \nabla \lambda_{ni}^a = \lambda_{nij}^a \omega^j. \tag{8}$$

Таким образом, уравнения (4), (5), (7), (8) вместе с соотношениями (6) задают оснащенную гиперполосу H_m аффинного пространства A_n.

Из (2) следует, что при фиксации точки $A \overset{def}{=} x$ базисной поверхности $V_m \subset H_m$ плоскости N_x (нормаль 1-го рода) и T_x (касательная плоскость) остаются неподвижными. Следовательно, на V_m возникает нормальное $N(V_m)$ и касательное $T(V_m)$ расслоения [6].

Структурные уравнения касательного расслоения $T(V_m)$ в силу (2), (4)—(7) имеют такой вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ d\omega_q^p = \omega_q^s \wedge \omega_s^p + \Omega_q^p,\ d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \Omega_b^a,$$
$$d\omega_b^p = \omega_b^i \wedge \omega_i^p + \Omega_b^p,\ d\omega_p^a = \omega_p^i \wedge \omega_i^a + \Omega_p^a,$$

где

$$\begin{aligned}&\Omega_q^p=\omega_q^a\wedge\omega_a^p+\omega_q^\alpha\wedge\omega_\alpha^p+\omega_q^n\wedge\omega_n^p=(b_{q[i}^p\lambda_{|a|j]}^p+b_{qt}^a\delta_{[i}^t\lambda_{|a|j]}^p+\\&+b_{qt}^n\delta_{[i}^t\lambda_{|n|j]}^p)\omega^i\wedge\omega^j=R_{qij}^p\omega^i\wedge\omega^j,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\Omega_b^a=\omega_b^\alpha\wedge\omega_\alpha^a+\omega_b^p\wedge\omega_p^a+\omega_b^n\wedge\omega_n^a=(\lambda_{b[i}^p b_{|p|j]}^a+b_{bc}^\alpha\delta_{[i}^c\lambda_{|\alpha|j]}^a+\\&+b_{bc}^n\delta_{[i}^c\lambda_{|n|j]}^a)\omega^i\wedge\omega^j=R_{bij}^a\omega^i\wedge\omega^j,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\Omega_b^p=\omega_b^\alpha\wedge\omega_\alpha^p+\omega_b^n\wedge\omega_n^p=\\&=(b_{bc}^\alpha\delta_{[i}^c\lambda_{|\alpha|j]}^p+b_{bc}^n\delta_{[i}^c\lambda_{|n|j]}^p)\omega^i\wedge\omega^j=R_{bij}^p\omega^i\wedge\omega^j,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\Omega_p^a=\omega_p^\alpha\wedge\omega_\alpha^a+\omega_p^n\wedge\omega_n^a=\\&=(b_{pc}^\alpha\delta_{[i}^c\lambda_{|\alpha|j]}^a+b_{pc}^n\delta_{[i}^c\lambda_{|n|j]}^a)\omega^i\wedge\omega^j=R_{pij}^a\omega^i\wedge\omega^j,\end{aligned}\tag{12}$$

$$R_{qij}^p=b_{q[i}^a\lambda_{|a|j]}^p+b_{qt}^\alpha\delta_{[i}^t\lambda_{|\alpha|j]}^p+b_{qt}^n\delta_{[i}^t\lambda_{|n|j]}^p,\tag{13}$$

$$R_{bij}^a=\lambda_{b[i}^p b_{|p|j]}^a+b_{bc}^\alpha\delta_{[i}^c\lambda_{|\alpha|j]}^a+b_{bc}^n\delta_{[i}^c\lambda_{|n|j]}^a,\tag{14}$$

$$R_{bij}^p=b_{bc}^\alpha\delta_{[i}^c\lambda_{|\alpha|j]}^p+b_{bc}^n\delta_{[i}^c\lambda_{|n|j]}^p,\tag{15}$$

$$R_{pij}^a=b_{pq}^\alpha\delta_{[i}^q\lambda_{|\alpha|j]}^a+b_{pq}^n\delta_{[i}^q\lambda_{|n|j]}^a.\tag{16}$$

Следуя работам [6; 7], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_m)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\omega^p,\omega^a,\omega_q^p,\omega_b^a,\omega_b^p,\omega_p^a$ и 2-формами кривизны (9)—(12), причем компоненты тензора кривизны $R_{kij}^l=\{R_{qij}^p,R_{aij}^b,R_{bij}^p,R_{pij}^a\}$ этой связности имеют строение (13)—(16).

Связность γ в касательном расслоении $T(V_m)$ назовем внутренней (касательной) аффинной связностью гиперполосы $H_m(\Lambda)\subset A_n$ [8].

3. Структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ с учетом (2), (4), (6), (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}&d\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta+\Omega_\alpha^\beta\quad(a),&&d\omega_\alpha^n=0,\\&d\omega_n^\alpha=\omega_n^{\hat\alpha}\wedge\omega_{\hat\alpha}^\alpha+\Omega_n^\alpha,&&d\omega_n^n=\Omega_n^n,\end{aligned}\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta = \lambda_{\alpha[k}^i b_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l = R_{\alpha kl}^\beta \omega^k \wedge \omega^l, (a)\\
&\Omega_n^\alpha = \omega_n^i \wedge \omega_i^\alpha = \lambda_{n[k}^i b_{l]i}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = R_{nkl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,\\
&\Omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha[k}^i b_{l]i}^n \omega^k \wedge \omega^l = 0,\\
&\Omega_n^n = \omega_n^i \wedge \omega_i^n = \lambda_{n[k}^i b_{l]i}^n \omega^k \wedge \omega^l = R_{nkl}^n \omega^k \wedge \omega^l,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&R_{\alpha kl}^\beta = \lambda_{\alpha[k}^i b_{l]i}^\beta, (a) \qquad && R_{nkl}^\alpha = \lambda_{n[k}^i b_{l]i}^\alpha,\\
&R_{\alpha kl}^n = \lambda_{\alpha[k}^i b_{l]i}^\beta = 0, && R_{nkl}^n = \lambda_{n[k}^i b_{l]i}^n.
\end{aligned} \tag{19}$$

Согласно работам [6; 7], получаем, что в нормальном расслоении $N(V_m)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^\perp$ с формами связности (17) и 2-формами кривизны (18), компоненты тензора кривизны $R_{\hat\alpha ij}^{\hat\beta} = \{R_{\alpha ij}^\beta, R_{nij}^\beta, R_{\alpha ij}^n, R_{nij}^n\}$ которой имеют строение (19). Связность $\gamma^\perp$ в дальнейшем будем называть нормальной центроаффинной связностью оснащенной гиперполосы $H_m(\Lambda)$.

4. Аналогично можно построить нормальную аффинную связность $\varphi^\perp$ в расслоении $N_{n-r}(V_m)$ нормалей 1-го рода для Λ-подрасслоения гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-r}(V_m)$ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned}
&d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B + \Omega_A^B, \ d\omega_A^n = \omega_A^{\hat B} \wedge \omega_{\hat B}^n + \Omega_A^n,\\
&d\omega_n^A = \omega_n^{\hat B} \wedge \omega_{\hat B}^A + \Omega_n^A, \ d\omega_n^n = \Omega_n^n,
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Omega_A^B = \omega_A^{\hat p} \wedge \omega_{\hat p}^B, \ \omega_A^p = \{\omega_a^p, \omega_\alpha^p\}, \ \omega_p^B = \{\omega_p^b, \omega_p^\beta\},$$

$$\Omega_A^B = (\lambda_{A[i}^p b_{|p|j]}^B + b_{A[i}^n \lambda_{|n|j]}^B)\omega^i \wedge \omega^j = R_{Aij}^B \omega^i \wedge \omega^j, \tag{21}$$

$$\Omega_A^n = \omega_A^p \wedge \omega_p^n = \lambda_{A[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n \omega^i \wedge \omega^j = R_{Aij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \tag{22}$$

$$\Omega_n^A = \omega_n^p \wedge \omega_p^A = \lambda_{n[i}^p b_{|p|j]}^A \omega^i \wedge \omega^j = R_{nij}^A \omega^i \wedge \omega^j, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_n^n = \omega_n^p \wedge \omega_p^n + \omega_n^a \wedge \omega_a^n =\\
&= (\lambda_{n[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n + \lambda_{n[i}^a \delta_{j]}^b b_{ab}^n)\omega^i \wedge \omega^j = R_{nij}^n \omega^i \wedge \omega^j,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$R^B_{Aij} = \lambda^p_{A[i}b^B_{|p|j]} + b^n_{A[i}\lambda^B_{|n|j]}, \qquad R^n_{Aij} = \lambda^p_{A[i}\delta^q_{j]}b^n_{pq},$$
$$R^A_{nij} = \lambda^p_{n[i}b^A_{|p|j]} = 0, \; R^n_{nij} = \lambda^p_{n[i}\delta^q_{j]}b^n_{pq} + \lambda^a_{n[i}\delta^b_{j]}b^n_{ab}. \tag{25}$$

5. Построим аффинную связность $\psi^{\perp}$ в расслоении $N_{n-s}(V_m)$ нормалей 1-го рода L-подрасслоения гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-s}(V_m)$ имеют вид

$$d\omega^Q_T = \omega^R_T \wedge \omega^Q_R + \Omega^Q_T, \; d\omega^n_T = \omega^{\hat{Q}}_T \wedge \omega^n_{\hat{Q}} + \Omega^n_T,$$
$$d\omega^T_n = \omega^{\hat{Q}}_n \wedge \omega^T_{\hat{Q}} + \Omega^T_n, \; d\omega^n_n = \Omega^n_n, \tag{26}$$

где

$$\Omega^Q_T = \omega^{\hat{a}}_T \wedge \omega^Q_{\hat{a}}, \; \omega^a_T = \{\omega^a_p, \omega^a_\alpha\}, \; \omega^Q_a = \{\omega^p_a, \omega^\alpha_a\},$$
$$\Omega^Q_T = (\lambda^a_{T[i}b^Q_{|a|j]} + b^n_{pq}\delta^p_T\delta^q_{[i}\lambda^Q_{|n|j]})\omega^i \wedge \omega^j = R^Q_{Tij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{27}$$
$$\Omega^T_n = \omega^a_n \wedge \omega^T_a = (\lambda^a_{n[i}\lambda^T_{|a|j]})\omega^i \wedge \omega^j = R^T_{nij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{28}$$
$$\Omega^n_T = \omega^a_T \wedge \omega^n_a = (b^n_{ab}\lambda^a_{T[i}\delta^b_{j]})\omega^i \wedge \omega^j = R^n_{Tij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{29}$$
$$\Omega^n_n = \omega^a_n \wedge \omega^n_a + \omega^p_n \wedge \omega^n_p =$$
$$= (b^n_{ab}\lambda^a_{n[i}\delta^b_{j]} + b^n_{pq}\lambda^p_{n[i}\delta^q_{j]})\omega^i \wedge \omega^j = R^n_{nij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{30}$$

где

$$\lambda^a_{Ti} \overset{def}{=} \{b^a_{pi}, \lambda^a_{\alpha i}\}, \; \lambda^Q_{ai} \overset{def}{=} \{\lambda^p_{ai}, b^\alpha_{ai}\}, \; \omega^Q_a \overset{def}{=} \lambda^q_{ai}\omega^i,$$
$$R^Q_{Tij} = \lambda^a_{T[i}\lambda^Q_{|a|j]} + b^n_{pq}\delta^p_T\delta^q_{[i}\lambda^Q_{|n|j]}, \; R^n_{Tij} = b^n_{ab}\lambda^a_{T[i}\delta^b_{j]}, \tag{31}$$
$$R^T_{nij} = \lambda^a_{n[i}\lambda^T_{|a|j]}, \; R^n_{nij} = b^n_{pq}\lambda^p_{n[i}\delta^q_{j]} + b^n_{ab}\lambda^a_{n[i}\delta^b_{j]}.$$

Так как в каждой точке $x \in V_m$ определена характеристика E_x гиперполосы $H_m(\Lambda)$ [1], причем $E_x \subset N_x$, то на базисной поверхности V_m определено расслоение характеристик $E(V_m)$, которое представляет собой нормальное $(n-m-1)$-мерное подрасслоение $N_{n-m-1}(V_m)$ [6]. Структурные уравнения расслоения $E(V_m)$ определяются уравнениями (17а)—(19а). Связность в расслоении $E(V_m)$ назовем нормальной центроаффинной характеристической связностью $\eta^{\perp}$ гиперполосы $H_m(\Lambda)$.

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Труды семинара по векторному анализу. Вып. 8. М., 1950. С. 197—272.

2. *Попов Ю. И.* Регулярные гиперполосы аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2011.

3. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы гиперполос проективного пространства : учебное пособие. Калининград, 2011.

4. *Акивис М. А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.

5. *Попов Ю. И.* Касательно r-оснащенные гиперполосы H_m аффинного пространства / РГУ им. И. Канта. Калининград, 2007. Деп. в ВИНИТИ 23.04.07, №445-В2007.

6. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: монография. Ереван, 1990.

7. *Остиану Н. М., Рыжков В. В., Швейкин П. И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

8. *Попов Ю. И.* Внутренняя геометрия регулярных гиперполос аффинного пространства / КГУ. Калининград, 1997. Деп. в ВИНИТИ, 1199-В97.

Yu. Popov

Normal connections of the tangential equipped hyperband in the affine space

Normal center-affine connections of hyperband $H_m(\Lambda)$, its L-, Λ-subbundle and inner (tangential) affine connection of hyperband are given. Curvature tensor of the connections are constructed.