N.V. Malakhovskii

CUBIC, ASSOCIATED WITH SIMSON LINES OF TRIANGLE

Using method of complex numbers in planimetry [3] cubic is investigated, formed by poles of Simson lines of a non degenerated triangle relative to the imaginary isotomic conic [1]. It is proved that lines, passing through two mutually isotomic conjugated points of the cubic envelope a conic, which touches the cubic at three points.

УДК 514.75

***Г. Матиева***
*(Ошский государственный университет)*

## НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ОБРАЗА СЕТИ ФРЕНЕ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В области $\Omega$ евклидова пространства $E_3$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении, порожденном заданным семейством гладких линий.

Пусть область $\Omega \subset E_3$ отнесена к подвижному ортонормированному реперу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i, j, k=1, 2, 3), который является репером Френе для линии $\omega^1$ заданного семейства. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k . \tag{1}$$

Формы $\omega^i, \omega_i^k$ удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \ D\omega_k^i = \omega_k^l \wedge \omega_l^i \qquad (2)$$

и уравнениям инвариантности метрики $dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k$, где $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства $E_n$. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\Sigma_F$. Так как репер построен на касательных к линиям сети Френе $\Sigma_F$, имеем

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j, \qquad (3)$$

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{ji}^k. \qquad (4)$$

Продолжая систему уравнений (3), получим

$$d\Lambda_{ik}^j - \Lambda_{il}^j \omega_k^l - \Lambda_{lk}^j \omega_i^l = \Lambda_{ikm}^j \omega^m \ \ (\Lambda_{ikm}^j = \Lambda_{imk}^j), \text{ или}$$

$$d\Lambda_{ik}^j = B_{ikm}^j \omega^m, \qquad (5)$$

где

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{il}^j \Lambda_{km}^l + \Lambda_{lk}^j \Lambda_{im}^l. \qquad (6)$$

Система функций $\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии $\omega^1$ имеют вид [1]:

$$\frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{e}_1 \ (ds = \omega^1), \ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3, \ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где $\Lambda_{11}^2$ – кривизна линии $\omega^1$, $\Lambda_{21}^3$ – кручение этой линии. Так как векторы $d\vec{e}_1/ds$, $\vec{e}_2$ коллинеарны, то имеем $\Lambda_{11}^3 = 0$.

Псевдофокус $F_i^j$ $(i \neq j)$ касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии $\omega^i$ сети $\sum_F$ определяется следующим радиус-вектором [2]:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^i}\vec{e}_i \,. \tag{7}$$

Так как $\Lambda_{31}^1 = -\Lambda_{11}^3 = 0$, то псевдофокус $F_3^1 \in (X, \vec{e}_3)$ является бесконечно удаленной точкой расширенного евклидова пространства $\overline{E}_3$. Следовательно,

$$F_2^1, F_2^3 \in (X, \vec{e}_2);\;\; F_1^2, F_1^3 \in (X, \vec{e}_1);\;\; F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)\,.$$

Рассмотрим псевдофокус $F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_1^3 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{13}^3}\vec{e}_1 \,. \tag{8}$$

Дифференцируя это равенство и учитывая (1), (3), (5), получим

$$d\vec{F}_1^3 = \omega^i \vec{b}_i \,,$$

где

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{131}^3}{(\Lambda_{13}^3)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{13}^3}\vec{e}_2 \,,$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{132}^3}{(\Lambda_{13}^3)^2}\vec{e}_1 + \left(1 - \frac{\Lambda_{12}^2}{\Lambda_{13}^3}\right)\vec{e}_2 + \frac{\Lambda_{12}^3}{\Lambda_{13}^3}\vec{e}_3 \,, \tag{9}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B_{133}^3}{\left(\Lambda_{13}^3\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{13}^3}\vec{e}_2 \,.$$

Геометрический смысл величин $B_{13i}^3$ заключается в следующем:

$$B_{13i}^3 = \vec{e}_3 \cdot d_i \vec{\Lambda}'_{13} \,,$$

где $d_i$ – символ дифференцирования по направлению $\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}'_{13} = \text{пр}_{\vec{e}_3}\vec{\Lambda}_{13}$, $\vec{\Lambda}_{13}$ – вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_1$ вдоль направления $\vec{e}_3$.

Когда точка X смещается в области $\Omega$, точка $F_1^3$ описывает свою область $\Omega_1^3$. Таким образом, определено отображение $h:\Omega \to \Omega_1^3$ такое, что $h(X) = F_1^3$. Область $\Omega_1^3$ отнесем к подвижному реперу $\overline{\Re} = (F_1^3, \vec{b}_i)$. Интегральные линии векторных полей $\vec{b}_i$ образуют сеть $h(\sum_F) = \sum'_F$ в области $\Omega_1^3$.

Потребуем ортогональности сети, т.е. пусть $\vec{b}_1\vec{b}_2 = 0,\ \vec{b}_1\vec{b}_3 = 0,\ \vec{b}_2\vec{b}_3 = 0$. Отсюда, учитывая (9), имеем:

$$B_{132}^3[(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3] = (\Lambda_{13}^3)^2 \Lambda_{11}^2(\Lambda_{13}^3 - \Lambda_{12}^2), \tag{10}$$

$$B_{133}^3[(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3] = (\Lambda_{13}^3)^2 \Lambda_{11}^2\Lambda_{13}^2, \tag{11}$$

$$B_{132}^3 B_{133}^3 = (\Lambda_{13}^3)^2 \Lambda_{13}^2(\Lambda_{13}^3 - \Lambda_{12}^2). \tag{12}$$

Из равенств (10), (11) получим, соответственно,

$$(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3 = \frac{(\Lambda_{13}^3)^2 \Lambda_{11}^2(\Lambda_{13}^3 - \Lambda_{12}^2)}{B_{132}^3},$$

$$(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3 = \frac{(\Lambda_{13}^3)^2 \Lambda_{11}^2\Lambda_{13}^2}{B_{133}^3}.$$

Приравнивая правые части этих равенств, имеем

$$B_{133}^3 = \frac{-B_{132}^3\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{13}^3 - \Lambda_{12}^2}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$B_{132}^3 = 0, \tag{14}$$

$$\Lambda_{13}^3 - \Lambda_{12}^2 = 0. \tag{15}$$

Если имеют место (14), (15), то равенства (10) и (12) превращаются в тождества.

Рассмотрим равенство (11). Для того чтобы оно было тождеством, должно быть $(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3 = 0$ и $\Lambda_{13}^2 = 0$, так как $B_{133}^3$ и $\Lambda_{13}^2$ не могут быть нулями одновременно (в противном случае $\vec{b}_3 = \vec{0}$ ), и $\Lambda_{13}^3 \neq 0, \Lambda_{11}^2 \neq 0$. Если допустить $\Lambda_{13}^2 \neq 0$ и $B_{133}^3 = 0$, то правая часть равенства (11) будет отлична от нуля, а левая часть равняется нулю. Поэтому

$$(\Lambda_{13}^3)^2 + B_{131}^3 = 0, \tag{16}$$

$$\Lambda_{13}^2 = 0. \tag{17}$$

Таким образом, из условий ортогональности векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ получим (14 – 17). Обратно, если имеют места равенства (14 – 17), то векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ попарно ортогональны, т. е. сеть – ортогональна. Следовательно, доказана

**Теорема**. *Сеть* $h(\Sigma_F) = \Sigma'_F$ *ортогональна тогда и только тогда, когда выполнены условия (14 – 17).*

Геометрический смысл этих соотношений заключается в следующем:

$$(16) \Leftrightarrow \vec{e}_3(d_1\vec{\Lambda}'_{13}) + \vec{\Lambda}'_{13} \cdot \vec{\Lambda}'_{13} = 0, \ (15) \Leftrightarrow F_1^2 \equiv F_1^3,$$

$$(14) \Leftrightarrow \vec{e}_3(d_2\vec{\Lambda}'_{13}) = 0 \text{ или } \vec{e}_3 \perp d_2\vec{\Lambda}'_{13}, \ (17) \Leftrightarrow \vec{\Lambda}_{13} \,//\, \vec{e}_3.$$

Линии $l, h(l) = \bar{l}$ называются двойными линиями отображения $h$, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках $X$ и $F_1^3 = h(X)$, пересекаются либо параллельны [2].

Рассмотрим совокупность векторов $\vec{e}_3, \vec{b}_3, \overrightarrow{XF_1^3}$, где $\overrightarrow{XF_1^3} = -\dfrac{1}{\Lambda_{13}^3}\vec{e}_1$. Требуя компланарности этих векторов, получим равенство (17). Верно и обратное, т. е. если имеет место (17), то линия $\omega^3$ сети Френе является двойной линией отображения $h$. Отсюда имеем

**Следствие**. *Если образ сети Френе в отображении* $h$ *– ортогональная сеть, то линия* $\omega^3$ *сети Френе является двойной линией этого отображения.*

Легко видеть, что векторы $\vec{e}_1, \vec{b}_1 = h(\vec{e}_1), \overrightarrow{XF_1^3}$ компланарны. Следовательно, линия $\omega^1$ сети Френе $\sum_F$ является двойной линией отображения $h$.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_2, \vec{b}_2 = h(\vec{e}_2)$, $\overrightarrow{XF_1^3}$ получим, что $\Lambda_{12}^3 = 0$. Но при $\Lambda_{12}^3 = 0$ из (9) следует, что векторы $\vec{b}_i$ – линейно зависимы. Это противоречит тому, что $\{\vec{b}_i\}$ – базис в $E_3$. Поэтому $\Lambda_{12}^3 \neq 0$, т. е. линия $\omega^2$ сети Френе $\sum_F$ не может быть двойной линией отображения $h$. Геометрический смысл неравенства $\Lambda_{12}^3 \neq 0$ заключается в том, что векторы $\vec{\Lambda}_{12}$ и $\vec{e}_2$ – неколлинеарны (где $\vec{\Lambda}_{12}$ – вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_1$ вдоль направления $\vec{e}_2$).

Рассмотрим линию $l$, принадлежащую распределению $\Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{l} = l^1\vec{e}_1 + l^2\vec{e}_2$. Рассмотрим линию $\bar{l} = h(l)$, ее касательным вектором является вектор $h(\vec{l}) = \vec{\bar{l}} = l^1\vec{b}_1 + l^2\vec{b}_2$. Найдем $\vec{\bar{l}}$: $\vec{\bar{l}} = -\dfrac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_1} l^1\vec{e}_2 + \dfrac{\Lambda_{12}^3}{\Lambda_{13}^3} l^2\vec{e}_3$. Из условия компланарности векторов $\vec{l}, \vec{\bar{l}}, \overrightarrow{XF_1^3}$ получим $\Lambda_{12}^3 = 0$. Но $\Lambda_{12}^3 \neq 0$, следовательно, пара $(h, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2))$ не имеет (кроме линии $\omega^1$) ни одной двойной линии, принадлежащей распределению $\Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Рассмотрим пару $(h, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3))$ и линию $l$, принадлежащую распределению $\Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$. Касательный вектор $\vec{l}$ такой линии имеет вид: $\vec{l} = l^1\vec{e}_1 + l^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}}$ линии $h(l) = \bar{l}$: $\vec{\bar{l}} = l^3 \dfrac{B_{133}^3}{(\Lambda_{13}^3)^2}\vec{e}_1 - \dfrac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{13}^3} l^1\vec{e}_2$. Из условия компланарности векторов $\vec{l}, \vec{\bar{l}}, \overrightarrow{XF_1^3}$ имеем: $\Lambda_{11}^2 l^1 l^3 = 0$, где $\Lambda_{11}^2$ – кривизна линии $\omega^1$ заданного семейства и $\Lambda_{11}^2 \neq 0$. Поэтому из последнего равенства имеем $l^1 = 0$, или $l^3 = 0$. Следовательно, пара $(h, \Delta_2 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3))$ имеет только одну двойную линию: либо $\omega^1$, либо $\omega^3$.

Аналогичном образом рассмотрим пару $(h, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ и линию $l$, принадлежащую распределению $\Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{l} = l^2\vec{e}_2 + l^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}}$ линии $h(l) = \bar{l}$: $\vec{\bar{l}} = \frac{B_{133}^3}{(\Lambda_{13}^3)^2} l^3\vec{e}_1 + \frac{\Lambda_{12}^3}{\Lambda_{13}^3} l^2\vec{e}_3$. Требуя компланарности векторов $\vec{l}, \vec{\bar{l}}, \overrightarrow{XF_1^3}$, имеем: $(l^2)^2 \Lambda_{12}^3 = 0$. Так как $\Lambda_{12}^3 \neq 0$, отсюда имеем $l^2 = 0$. Следовательно, $\vec{l} = l^2\vec{e}_2$, т. е. двойной линией пары $(h, \Delta_2 = \Delta(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ является только линия $\omega^2$.

### *Список литературы*

1. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.; Л.: ИЛ, 1960.

2. *Базылев В.Т.* Многомерные сети двойных линий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 19 – 25.

G. Matieva

## THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF AN ORTHOGONALITY FOR AN IMAGE OF FRENE'S WEB IN PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE

In the field $\Omega$ of Euclidean space $E_3$ the set of smooth lines so is given, that through each point $X \in \Omega$ there passes one line of this set. The necessary and sufficient conditions of an orthogonality for an image of a Frene's web in the partial mapping, generated by a given set of smooth lines, are found.