УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-17

Квазитензор кривизны-кручения фундаментально-групповой связности Лаптева

Рассмотрено пространство с фундаментально-групповой связностью Лаптева, обобщающее пространства со связностями Картана. Структурные уравнения Лаптева приведены к более простому виду. Продолжение приведенных структурных уравнений позволило найти дифференциальные сравнения для коэффициентов в этих уравнениях. Доказано, что одна часть этих коэффициентов образует тензор, а другая часть — квазитензор, что обосновывает название «квазитензор кривизны-кручения» для всей совокупности. Из дифференциальных сравнений для компонент этого квазитензора получены сравнения для компонент тензора кривизны-кручения Лаптева, который содержит 9 подтензоров, входящих в неприведенные структурные уравнения.

В двух особых случаях пространство с фундаментально-групповой связностью является пространством со связностью Картана, обладающим квазитензором кривизны-кручения, который содержит квазитензор кручения. В редуктивном случае пространство картановой связности превращается в такое главное расслоение со связностью, которое имеет не только тензор кривизны, но и тензор кручения.

Ключевые слова: фундаментально-групповая связность, связность Картана, квазитензор кривизны-кручения, тензор кривизны-кручения.

Поступила в редакцию 27.04.2020 г.
© Шевченко Ю. И., 2020

1. Преобразование структурных уравнений Лаптева

Понятие связности Картана используется в трех смыслах: 1) главная связность — связность в главном расслоении; 2) неглавная связность, например, классическая проективная связность; 3) общая связность — объединяющая оба предыдущих случая. Рассмотрим фундаментально-групповую связность Лаптева, которая включает общую связность Картана. Запишем структурные уравнения пространства фундаментально-групповой связности [4, с. 311, 316, 339, 342] в подробном виде:

$$d\omega^{s_0} = R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_0}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \quad (1)$$

$$\begin{gathered} d\omega^{s_1} = C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + 2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ + R^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{gathered} \quad (2)$$

$$\begin{gathered} d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + 2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + \\ + R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{gathered} \quad (3)$$

где индексы принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} s_0,\ldots = \overline{-m+1,0};\ s_1,\ldots = \overline{1,n};\ s_2,\ldots = \overline{n+1,n+r}; \\ s_{01},\ldots = \overline{-m+1,n};\ s_{12},\ldots = \overline{1,n+r};\ s_{012},\ldots = \overline{-m+1,n+r}. \end{gathered}$$

Здесь $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ — постоянные $(n+r)$-мерной группы Ли G_{n+r}, содержащей r-членную подгруппу H_r. Они антисимметричны и удовлетворяют тождествам Якоби, причем часть постоянных равна нулю:

$$C^{s_{12}}_{(p_{12}q_{12})} = 0,\ C^{s_{12}}_{p_{12}\{q_{12}}C^{p_{12}}_{r_{12}t_{12}\}} = 0,\ C^{s_1}_{p_2q_2} = 0, \quad (4)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки — циклирование. Коэффициенты $R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}$, удовлетворя-

ющие условию антисимметрии $R^{s_{012}}_{(p_{01}q_{01})}=0$, образуют тензор кривизны кручения [4, с. 339, 340, 342]. Если тензор кривизны-кручения $R=\{R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}\}$ обращается в нуль, то уравнение (1) принимает вид $d\omega^{s_0}=0$, а уравнения (2, 3) превратятся в структурные уравнения группы G_{n+r} с подгруппой H_r (ср. [1, с. 320]), иначе говоря, в уравнения главного расслоения $H_r(E_n)$ с базой — однородным пространством $E_n=G_{n+r}/H_r$ и типовым слоем H_r.

Обозначим пространство фундаментально-групповой связности Лаптева через $L_{m,n,r}$. Система уравнений $\omega^{s_{01}}=0$ вполне интегрируема, поэтому пространство $L_{m,n,r}$ имеет базу — $(m+n)$-мерное многообразие V_{m+n} со структурными уравнениями (1, 2). Уравнения (1—3) пространства $L_{m,n,r}$ показывают, что оно есть главное расслоение $H_r(V_{m+n})$ над многообразием V_{m+n} с типовым слоем H_r. Если выполняется условие редуктивности (см., напр., [1, с. 176; 2, с. 357; 6, с. 456])

$$C^{s_2}_{p_1q_2}=0, \tag{5}$$

то расслоение $H_r(V_{m+n})$ становится пространством с главной связностью $H_{r,m+n}$.

Замечание 1. Для подмножеств форм связности $\omega^{s_{012}}$ можно использовать следующие названия (названия Лаптева [4, с. 305, 306] приведены в скобках):

ω^{s_0} — чисто базисные (побочные) формы,

ω^{s_1} — базисно-слоевые (главные) формы,

ω^{s_2} — чисто слоевые (вторичные) формы,

$\omega^{s_{01}}$ — базисные (первичные) формы,

$\omega^{s_{12}}$ — слоевые (специализированные) формы.

Структурные уравнения (2, 3) запишем короче:

$$d\omega^{s_1} = 2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + R^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + \\ + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + K^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \tag{6}$$

$$d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + 2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ + R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + K^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \tag{7}$$

где

$$K^{s_1}_{p_1q_1} = R^{s_1}_{p_1q_1} + C^{s_1}_{p_1q_1},\ K^{s_2}_{p_1q_1} = R^{s_2}_{p_1q_1} + C^{s_2}_{p_1q_1}. \tag{8}$$

Назовем $K = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_{12}}_{p_0q_{01}}, K^{s_{12}}_{p_1q_1}\}$ преобразованным объектом кривизны-кручения. Найдем дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют компоненты объекта *K*.

2. Побочный тензор кручения

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и используя уравнения (6), получим уравнения следующего вида:

$$\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge[dR^{s_0}_{p_0q_0} + (\ldots)^{s_0}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge[dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\ldots)^{s_0}_{p_0q_1t_1}\omega^{t_1}] + \\ + \omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge[dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} + (\ldots)^{s_0}_{[p_1q_1]t_1}\omega^{t_1}] = 0,$$

где

$$\omega^{t_1}_{q_1} = 2C^{t_1}_{q_1r_2}\omega^{r_2}. \tag{9}$$

Для справедливости этих кубичных уравнений необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках являлись линейными комбинациями базисных форм:

$$dR^{s_0}_{p_0q_0} + (\ldots)^{s_0}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}} = R^{s_0}_{p_0q_0t_{01}}\omega^{t_{01}},$$
$$dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\ldots)^{s_0}_{p_0q_1t_1}\omega^{t_1} = R^{s_0}_{p_0q_1t_{01}}\omega^{t_{01}},$$
$$dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} + (\ldots)^{s_0}_{[p_1q_1]t_1}\omega^{t_1} = R^{s_0}_{p_1q_1t_{01}}\omega^{t_{01}}.$$

Такие дифференциальные уравнения используются в обобщенных тождествах Бьянки [4, с. 339]. Запишем эти уравнения в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм:

$$\begin{gathered} dR^{s_0}_{p_0q_0} \cong 0 \pmod{\omega^{t_{01}}},\ dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} \cong 0, \\ dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} \cong 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Значит, на базе V_{m+n} пространства $L_{m,n,r}$ заданы $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ однокомпонентных тензоров, или абсолютных инвариантов, $R^{s_0}_{p_0q_0}$ (см.: [4, с. 299, 331]), m^2 одновалентных тензоров $R^{s_0}_{p_0} = \{R^{s_0}_{p_0q_1}\}$ и m двухвалентных кососимметрических тензоров $R^{s_0} = \{R^{s_0}_{p_1q_1}\}$ (см.: [4, с. 297, 331]). Отметим, что тензоры Лаптева не являются классическими тензорами.

Замечание 2. Поскольку объект $R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}$ состоит из тензоров $R^{s_0}_{p_0q_0}$, $R^{s_0}_{p_0}$, R^{s_0}, он является тензором, который назовем побочным тензором кручения (см.: [5]). Инвариантные равенства $R^{s_0}_{p_{01}q_{01}} = 0$ делают уравнения (1) тривиальными: $d\omega^{s_0} = 0$, но не меняют уравнения (2, 3), то есть приводят к специализированной фундаментально-групповой связности [4, с. 331].

3. Главный квазитензор кручения

Замыкая уравнения (6) с помощью уравнений (1, 7), получим

$$\begin{gathered} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} \wedge [dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} + (\ldots)^{s_1}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_0} \wedge \omega^{q_1} \wedge [dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\ldots)^{s_1}_{p_0q_1t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} \wedge [\Delta K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} + (\ldots)^{s_1}_{[p_1q_1]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} \wedge \omega^{r_2}(C^{s_1}_{t_2p_1}C^{t_2}_{q_2r_2} + 2C^{s_1}_{t_1[q_2}C^{t_1}_{r_2]p_1}) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\Delta K^{s_1}_{p_1q_1} = dK^{s_1}_{p_1q_1} + K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - K^{s_1}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} - K^{s_1}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1}$.

Последнее слагаемое в уравнениях (11) равно нулю согласно тождествам Якоби. Действительно, соответствующая этому слагаемому часть тождеств (4_2) имеет вид

$$C^{s_1}_{t_{12}\{p_1}C^{t_{12}}_{q_2r_2\}} = 0\,.$$

Раскрывая циклирование, записывая подробнее суммирование и учитывая условие (4_3), выделяющее подгруппу H_r, получим тождество

$$C^{s_1}_{t_1q_2}C^{t_1}_{r_2p_1} + C^{s_1}_{t_1r_2}C^{t_1}_{p_1q_2} + C^{s_1}_{t_2p_1}C^{t_2}_{q_2r_2} = 0,$$

левая часть которого находится в скобках последнего слагаемого уравнений (11). Следовательно, эти уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} + \ldots) + \\ +2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + \ldots) + \\ +\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} + \ldots) = 0.\end{gathered}$$

Эти кубичные уравнения могут выполняться лишь тогда, когда выражения в скобках являются линейными комбинациями базисных форм, что приводит к дифференциальным сравнениям

$$\begin{gathered}dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^{t_{01}}), \\ dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} \cong 0, \\ \Delta K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2} \cong 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Итак, получили $\frac{1}{2}m(m-1)$ одновалентных тензоров $R_{p_0q_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_0}\}$, m двухвалентных тензоров $R_{p_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_1}\}$ и кососимметрический квазитензор $K^{s_1}_{p_1q_1}$ (см.: [4, с. 297, 330]). Квазитензор станет тензором при выполнении условия

$$C^{s_1}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2} = 0. \tag{13}$$

Составной объект $\{R^{s_1}_{p_0q_{01}}, K^{s_1}_{p_1q_1}\}$ назовем главным квазитензором кручения.

4. Квазитензор кривизны-кручения

Дифференцируем внешние уравнения (7), используя уравнения (1, 6):

$$\begin{gathered}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_0}+R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2}+R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\ +2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_1}+R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1}+R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\ +\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2}+\ldots)+\\ +2\omega^{r_1}\wedge\omega^{q_2}\wedge\omega^{t_2}(2C^{s_2}_{p_2[q_2}C^{p_2}_{t_2]r_1}+2C^{s_2}_{p_1[q_2}C^{p_1}_{t_2]r_1}+\\ +C^{s_2}_{p_2r_1}C^{p_2}_{q_2t_2})+2\omega^{q_2}\wedge\omega^{r_2}\wedge\omega^{t_2}C^{s_2}_{p_2\{q_2}C^{p_2}_{r_2t_2\}}=0,\end{gathered}\tag{14}$$

где

$$\omega^{s_2}_{t_2}=2C^{s_2}_{t_2r_2}\omega^{r_2},\ \omega^{s_2}_{t_1}=2C^{s_2}_{t_1r_2}\omega^{r_2},\tag{15}$$

$$\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}=dK^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_2}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-K^{s_2}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1}-K^{s_2}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1}.$$

В уравнениях (14) два последних слагаемых равны нулю в силу тождеств Якоби и условия существования подгруппы H_r. В самом деле, запишем соответствующие части тождеств (4_2) и учтем условие (4_3):

$$\begin{gathered}C^{s_2}_{p_2q_2}C^{p_2}_{t_2r_1}+C^{s_2}_{p_2t_2}C^{p_2}_{r_1q_2}+C^{s_2}_{p_2r_1}C^{p_2}_{q_2t_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}C^{p_1}_{t_2r_1}+\\ +C^{s_2}_{p_1t_2}C^{p_1}_{r_1q_2}=0,\quad C^{s_2}_{p_2\{q_2}C^{p_2}_{r_2t_2\}}=0.\end{gathered}$$

Левые части этих тождеств, среди которых присутствуют тождества Якоби для подгруппы H_r, являются множителями в слагаемых уравнений (14), поэтому уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_0}+R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2}+R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\ +2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_1}+R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1}+R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\ +\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2}+\ldots)=0.\end{gathered}$$

Отсюда вытекают дифференциальные сравнения

$$\begin{gathered} dR^{s_2}_{p_0q_0} + R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^{r_{01}}), \\ dR^{s_2}_{p_0q_1} + R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2} - R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1} \cong 0, \\ \Delta K^{s_2}_{p_1q_1} + K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + 4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2} \cong 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, имеем $\frac{1}{2}m(m-1)$ одновалентных тензоров $\mathbb{R}_{p_0q_0} = \{R^{s_{12}}_{p_0q_0}\}$, содержащих подтензоры $R_{p_0q_0}$, m двухвалентных тензоров $\mathbb{R}_{p_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_1}\}$ с подтензорами R_{p_0} и квазитензор $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$, включающий подквазитензор $K^{s_1}_{p_1q_1}$. Если выполняется условие

$$C^{s_{12}}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2} = 0\,, \tag{17}$$

содержащее условие (13), то квазитензор $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$ становится тензором с подтензором $K^{s_1}_{p_1q_1}$.

Теорема 1. *Преобразованный объект кривизны-кручения* $K = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_{12}}_{p_0q_{01}}, K^{s_{12}}_{p_1q_1}\}$ *пространства фундаментально-групповой связности Лаптева* $L_{m,n,r}$ *с приведенными структурными уравнениями (1, 6, 7) образует квазитензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (10, 12, 16). Квазитензор кривизны-кручения K распадается на* $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ *инвариантов* $R^{s_0}_{p_0q_0}$, $\frac{1}{2}m(3m-1)$ *одновалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_0q_1}$, $R^{s_{12}}_{p_0q_0}$, $2m$ *двухвалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_1q_1}$, $R^{s_{12}}_{p_0q_1}$ *и квазитензор* $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$. *При условии (17) K превращается в тензор приведенной кривизны-кручения.*

Следствие. Квазитензор кривизны-кручения K имеет подквазитензор кручения $\overline{K} = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_1}_{p_0q_{01}}, K^{s_1}_{p_1q_1}\}$, состоящий из

побочного тензора кручения и главного квазитензора кручения. Если выполняется условие (13), то квазитензор кручения $\overline{K}$ становится тензором приведенного кручения.

5. Тензор кривизны-кручения

Получим дифференциальные сравнения для компонент тензора кривизны-кручения R из сравнения для компонент квазитензора. Подставим выражения (8) в сравнения (12_3, 16_3):

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + \Delta C^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + \Delta C^{s_2}_{p_1q_1} + R^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + C^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + 4C^{s_2}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} \cong 0.$$

Подействуем дифференциальным оператором Δ на постоянные $C^{s_{12}}_{p_1q_1}$ и раскроем альтернирования:

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + (C^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_1}_{r_1} - C^{s_1}_{r_1q_1}\omega^{r_1}_{p_1} - C^{s_1}_{p_1r_1}\omega^{r_1}_{q_1}) + \\ + 2(C^{s_1}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_1}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + (C^{r_2}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_2} - C^{s_2}_{r_1q_1}\omega^{r_1}_{p_1} - C^{s_2}_{p_1r_1}\omega^{r_1}_{q_1}) + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + \\ + C^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + 2(C^{s_2}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_2}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0.$$

Воспользуемся обозначениями (9, 15):

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + 2(C^{r_1}_{p_1q_1}C^{s_1}_{r_1t_2} - C^{s_1}_{r_1q_1}C^{r_1}_{p_1t_2} - C^{s_1}_{p_1r_1}C^{r_1}_{q_1t_2} + \\ + C^{s_1}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_1}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + 2(C^{r_2}_{p_1q_1}C^{s_2}_{r_2t_2} - C^{s_2}_{r_1q_1}C^{r_1}_{p_1t_2} - C^{s_2}_{p_1r_1}C^{r_1}_{q_1t_2} + \\ + C^{r_1}_{p_1q_1}C^{s_2}_{r_1t_2} + C^{s_2}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_2}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0.$$

Записывая соответствующие части тождеств Якоби (4_2), используя условия антисимметрии (4_1) и существования подгруппы (4_3), получаем, что выражения в скобках равны нулю, поэтому сравнения принимают вид

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} \cong 0 \pmod{\omega^{t_{01}}}, \quad \Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} \cong 0. \qquad (18)$$

Теорема 2. *Компоненты тензора кривизны-кручения* $R = \{R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}\}$ *пространства фундаментально-групповой связности Лаптева* $L_{m,n,r}$ *с неприведенными структурными уравнениями (1—3) удовлетворяют дифференциальным сравнениям (10,* $12_{1,2}$*,* $16_{1,2}$*, 18). Тензор R состоит из абсолютных инвариантов* $R^{s_0}_{p_0q_0}$*, одновалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_0q_1}$*,* $R^{s_{12}}_{p_0q_0}$*, двухвалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_1q_1}$*,* $R^{s_{12}}_{p_0q_1}$ *и тензора* $R^{s_{12}}_{p_1q_1}$*. Тензор кривизны-кручения R содержит тензор кручения* $R^{s_{01}}_{p_{01}q_{01}}$*.*

Замечание 3. Тензор R имеет 23 подтензора [4, с. 340], из которых только 8 не являются составными:

$$R^{s_0}_{p_0q_1},\ R^{s_0}_{p_1q_1},\ R^{s_1}_{p_0q_0},\ R^{s_1}_{p_0q_1},\ R^{s_1}_{p_1q_1},\ R^{s_{12}}_{p_0q_0},\ R^{s_{12}}_{p_0q_1},\ R^{s_{12}}_{p_1q_1}.$$

Компоненты этих тензоров вместе с особым тензором $R^{s_0}_{p_0q_0}$, состоящим из инвариантов, служат коэффициентами в структурных уравнениях (1—3).

6. Пространства со связностями Картана

Если тензорная часть квазитензора кривизны-кручения K равна нулю:

$$R^{s_0}_{p_{01}q_{01}} = 0,\ R^{s_{12}}_{p_0q_{01}} = 0, \tag{19}$$

то уравнения (1) вырождаются: $d\omega^{s_0} = 0$, а уравнения (6, 7) принимают вид (см.: [1, с. 175; 4, с. 356])

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1} \wedge (2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{q_2} + K^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{q_1}), \tag{20}$$

$$d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + 2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} + K^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1}. \tag{21}$$

Эти же уравнения получаются тогда, когда побочные формы ω^{s_0} отсутствуют.

Если выполняется условие редуктивности (5), то структурные уравнения (21) становятся проще (см. [1, с. 176; 4, с. 357]):

$$d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2 q_2}\omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + K^{s_2}_{p_1 q_1}\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} . \qquad (22)$$

В этом случае справедливо условие тензорности (17) и в силу обозначения (15_2) аннулируются формы $\omega^{s_2}_{t_1} = 0,$ поэтому дифференциальные сравнения (12_3, 16_3) принимают простейший вид:

$$\Delta K^{s_1}_{p_1 q_1} \cong 0,\ \Delta K^{s_2}_{p_1 q_1} \cong 0 .$$

Значит, квазитензор кривизны-кручения $K^{s_{12}}_{p_1 q_1}$, содержащий квазитензор кручения $K^{s_1}_{p_1 q_1}$, превратился в тензор, который распался на 2 подтензора $K^{s_1}_{p_1 q_1}$ и $K^{s_2}_{p_1 q_1}$.

Выводы

1. Если в пространстве фундаментально-групповой связности Лаптева $L_{m,n,r}$ с приведенными уравнениями (1, 6, 7) выполнится условие (19), то оно станет пространством картановой связности со структурными уравнениями (20, 21), причем побочные формы превратятся в полные дифференциалы, не играющие существенной роли.

2. С другой стороны, если побочных форм нет, то имеем особое пространство Лаптева $L_{0,n,r}$ с теми же структурными уравнениями (20, 21), являющееся пространством со связностью Картана.

3. Пространство картановой связности есть специальное главное расслоение $H_r(V_n)$ над n-мерным многообразием V_n с типовым слоем — подгруппой $H_r \subset G_{r+n}$, причем расслоение $H_r(V_n)$ не обладает главной связностью [3, с. 167].

4. В общем случае пространство со связностью Картана имеет квазитензор кривизны-кручения, содержащий квазитензор кручения (ср. [8; 9]). При выполнении условия тензорности (17) квазитензоры становятся тензорами. Так происходит в случае классической проективной связности (см.: [7]).

5. В редуктивном случае главное расслоение $H_r(V_n)$ является пространством главной связности $H_{r,n}$ со структурными уравнениями (20, 22), причем это пространство наряду с тензором кривизны $K^{s_2}_{p_1q_1}$ имеет тензор кручения $K^{s_1}_{p_1q_1}$, то есть непосредственно обобщает пространство аффинной связности.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера // Геометрия — 3. Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. М., 2002. Т. 30. С. 170—204.

2. *Евтушик Л.Е.* Структуры высших порядков. М., 2014.

3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. об-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Лаптев Г.Ф.* О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, №1. С. 17—20.

6. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69, №3. С. 434—469.

7. *Шевченко Ю.И.* Иерархия пространств проективной связности // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 178—192.

8. *Шевченко Ю.И.* Тензор кривизны-кручения связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 155—168.

9. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности // Соврем. геом. и ее прилож. — 2019 : сб. тр. междунар. науч. конф. Казань, 2019. С. 166—169.

Yu. I. Shevchenko[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-17

Curvature-torsion quasitensor of Laptev fundamental-group connection

Submitted on April 27, 2020

We consider a space with Laptev's fundamental group connection generalizing spaces with Cartan connections. Laptev structural equations are reduced to a simpler form. The continuation of the given structural equations made it possible to find differential comparisons for the coefficients in these equations. It is proved that one part of these coefficients forms a tensor, and the other part forms is quasitensor, which justifies the name quasitensor of torsion-curvature for the entire set. From differential congruences for the components of this quasitensor, congruences are obtained for the components of the Laptev curvature-torsion tensor, which contains 9 subtensors included in the unreduced structural equations.

In two special cases, a space with a fundamental connection is a space with a Cartan connection, having a quasitensor of torsion-curvature, which contains a quasitensor of torsion. In the reductive case, the space of the Cartan connection is turned into such a principal bundle with connection that has not only a curvature tensor, but also a torsion tensor.

Keywords: fundamental group connection, Cartan connection, quasitensor of torsion-curvature, torsion-curvature tensor.

References

1. *Evtushik, L. E.:* Cartan connections and Kawaguchi geometry of spaces obtained by the moving frame method, Geometry — 3, Itogi nauki i tekhn. Sovrem. Math. and its app. Theme reviews. Moscow. 30, 170—204 (2002).
2. *Evtushik, L. E.:* Structures of higher orders. Moscow (2014).

3. *Kobayashi, S.:* Transformation groups in differential geometry. Moscow (1986).

4. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

5. *Laptev, G. F.:* On manifolds of geometric elements with differential connection. Dokl. Akad. Nauk USSR, **78**:1, 17—20 (1950).

6. *Lumiste, Yu. G.:* Connections in homogeneous bundles. Math. Sb., 69, 434—469 (1966).

7. *Shevchenko, Yu. I.:* The hierarchy of spaces of projective connection. DGMF. Kaliningrad. 49, 178—192 (2018).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Curvature-torsion tensor of Cartan connection. DGMF. Kaliningrad. 50, 155—168 (2019).

9. *Shevchenko, Yu. I., Skrydlova, E. V.:* Interpretation of Cartan connectivity using two-tier principal connectivity. Modern geom. and its app. — 2019. Kazan, 166—169 (2019).