УДК 514.76

В.И. Паньженский
(Пензенский государственный педагогический университет)

МЕТРИКИ ФИНСЛЕРОВА ТИПА, БЛИЗКИЕ К РИМАНОВЫМ

Известно большое число специальных финслеровых метрик и метрик финслерова типа (обобщенно финслеровых, лагранжевых, обобщённо лагранжевых), в построении которых участвуют римановы метрики [1; 2].

В настоящей работе мы предлагаем конструкцию построения метрик финслерова типа, близких к римановым, основанную на разложении в ряд Тейлора метрического тензора по степеням касательного вектора. Специализируя входящие в этот ряд тензоры, мы получаем известные метрики, вводимые авторами по другим соображениям.

1. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, TM – касательное расслоение над M, $\left(x^i\right)$ – локальные координаты на M, $\left(x^i, y^i\right)$ – естественные локальные координаты на TM. Задание невырожденного симметрического тензорного поля $g = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$ определяет на M обобщённую лагранжеву структуру, а $£^n = (M, g)$ называется обобщённым лагранжевым пространством. Если существует функция F на TM, порождающая метрический тензор $g : g_{ij} = F_{\cdot i \cdot j} \quad (F_{\cdot i} = \partial F / \partial y^i)$, то мы имеем лагранжево пространство $L^n = (M, F)$. Если функции $g_{ij}(x,y)$ на TM являются однородными нулевой степени по слоевым координатам y^i, то обобщённое лагранжево пространство называется обобщённым финслеровым Φ^n, и если существует функция F на TM, порождающая метрический тензор g пространства Φ^n, то мы имеем финслерово пространство F^n.

Компоненты метрического тензора пространства $£^n$ разложим в ряд Тейлора по степеням касательного вектора:

$$g_{ij}(x,y) = g_{ij}(x,0) + g_{ij\cdot k_1}(x,0)y^{k_1} + \ldots + \frac{1}{p!} g_{ij\cdot k_1\cdot \ldots \cdot k_p}(x,0)y^{k_1} \ldots y^{k_p} + \ldots \quad (1)$$

Введём следующие тензоры на M:

$$h_{ij}(x)=g_{ij}(x,0),\ h_{ijk_1}(x)=g_{ij\cdot k_1}(x,0),\quad h_{ijk_1\dots k_p}(x)=\frac{1}{p!}g_{ij\cdot k_1\cdot\dots\cdot k_p}(x,0)$$

и в соответствии с разложением (1) построим тензор

$$g_{ij}(x,y)=h_{ij}+h_{ijk_1}y^{k_1}+\ldots+h_{ijk_1\dots k_p}y^{k_1}\ldots y^{k_p}. \qquad (2)$$

Определение 1. Метрика (2) называется обобщённой лагранжевой метрикой, близкой к римановой порядка p.

При p = 0 мы имеем риманову метрику с метрическим тензором h_{ij}. Так как функции $g_{ij}(x,y)$, определённые равенствами (2), не обладают однородностью по координатам касательного вектора, то они не могут служить компонентами финслерова или обобщённого финслерова метрического тензора. Однако, имея риманов метрический тензор h_{ij}, мы можем нормировать касательный вектор y. Обозначив через $\|y\|=\sqrt{h_{ij}y^i y^j}$ длину вектора y в римановой метрике h, построим тензор

$$g_{ij}(x,y)=h_{ij}+h_{ijk_1}\frac{y^{k_1}}{\|y\|}+\ldots+h_{ijk_1\dots k_p}\frac{y^{k_1}\ldots y^{k_p}}{\|y\|^p}. \qquad (3)$$

Определение 2. Метрику (3) назовём обобщённой финслеровой метрикой, близкой к римановой порядка p.

2. Напомним, что под римановой геометрией понимается геометрия гладкого многообразия, наделённого метрическим тензором и связностью Леви-Чивита. Аналогом связности Леви-Чивита для обобщённых метрических пространств является связность Картана.

Пусть $\Gamma_{ij}^k(x)$ – компоненты связности Леви-Чивита ∇ римановой метрики h, а $\Gamma_{ij}^{*k}(x,y)$ – компоненты усечённой связности Картана ∇^* обобщённой метрики g. Эта связность согласована с метрическим тензором $\nabla^* g=0$ и без кручения $\Gamma_{ij}^{*k}=\Gamma_{ji}^{*k}$. Из этих условий следует, что коэффициенты связности Картана являются решением системы уравнений

$$\Gamma_{ij}^{*k}=\frac{1}{2}g^{ks}(\delta_i g_{sj}+\delta_j g_{is}-\delta_s g_{ij}), \qquad (4)$$

где g^{ks} – контрвариантные компоненты метрического тензора, а $\delta_i = \partial_i - \Gamma^{*k}_{i0}\dot{\partial}_k$, $\partial_i = \partial / \partial x^i$, $\dot{\partial}_k = \partial / \partial y^k$, $\Gamma^{*k}_{i0} = \Gamma^{*k}_{ij} y^j$. Если система (4) имеет единственное решение, то обобщённую метрику g называют регулярной.

Под геометрией обобщённого пространства $£^n$ или Φ^n мы будем понимать геометрию гладкого многообразия, наделённого регулярной метрикой и связностью Картана.

Теорема 1. *Связность Картана обобщённого лагранжева пространства с метрикой (2) совпадает со связностью Леви-Чивита римановой метрики* h *тогда и только тогда, когда входящие в (2) тензоры* $h_{ijk_1}, \ldots, h_{ijk_1 \ldots k_p}$ *ковариантно постоянны.*

Доказательство. Пусть связность Картана совпадает со связностью Леви-Чивита: $\nabla^* = \nabla$. Так как связность Картана стабильна, т. е. $\nabla^* y = 0$, то из (2) имеем

$$\nabla h_{ijk_1} y^{k_1} + \ldots + \nabla h_{ijk_1 \ldots k_p} y^{k_1} \ldots y^{k_p} = 0, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\nabla h_{ijk_1} = 0, \quad \ldots, \quad \nabla h_{ijk_1 \ldots k_p} = 0. \tag{6}$$

Обратно, пусть тензоры в (2) ковариантно постоянны относительно связности Картана ∇^*, т.е.

$$\nabla^* h_{ijk_1} = 0, \quad \ldots, \quad \nabla^* h_{ijk_1 \ldots k_p} = 0, \tag{7}$$

тогда и $\nabla^* h_{ij} = 0$, откуда следует, что $\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ и, следовательно, $\nabla^* = \nabla$.

3. Приведём некоторые примеры.

• *Метрики первого порядка близости*. В этом случае обобщённая лагранжева метрика (2) примет вид

$$g_{ij} = h_{ij} + h_{ijk} y^k, \tag{8}$$

а обобщённая финслерова –

$$g_{ij} = h_{ij} + h_{ijk} \frac{y^k}{\|y\|}. \tag{9}$$

Для метрики (9) так же, как и для (8), справедлива предыдущая теорема, так как из $\nabla h_{ijk}\dfrac{y^k}{\|y\|}=0$ следует, что $\nabla h_{ijk}=0$ $\left(\nabla y=0,\ \nabla\|y\|=0\right)$.

Положив $h_{ij}=a_{ij}$, $h_{ijk}=a_{ij}b_k$, где a_{ij} – риманов метрический тензор, а b_k – компоненты дифференциальной формы на М, получим (α,β)-метрики, близкие к римановым:

$$g_{ij}=(1+b_k y^k)a_{ij}, \tag{10}$$

$$g_{ij}=(1+\frac{b_k}{\|y\|}y^k)a_{ij}. \tag{11}$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Связность Картана для (α,β)-метрик (10) и (11) совпадает со связностью Леви-Чивита α-метрики тогда и только тогда, когда дифференциальная форма β ковариантно постоянна.*

Замечание. На наш взгляд, представляют интерес и метрики первого порядка близости, если в качестве тензора h_{ijk} взять $\nabla_k R_{ij}$, где R_{ij} – тензор Риччи для метрического тензора h_{ij}, т.е.

$$g_{ij}=h_{ij}+\nabla_k R_{ij}y^k, \tag{12}$$

$$g_{ij}=h_{ij}+\nabla_k R_{ij}\frac{y^k}{\|y\|}. \tag{13}$$

• *Метрики второго порядка близости*. В качестве примера рассмотрим обобщённые лагранжевы и обобщённые финслеровы метрики, положив $h_{ijk}=0, h_{ijkl}=a(x)h_{ik}h_{jl}$, где $a(x)$– скалярная функция на М. Тогда

$$g_{ij}=h_{ij}+a(x)y_i y_j, \tag{14}$$

$$g_{ij}=h_{ij}+a(x)\frac{y_i y_j}{\|y\|^2}, \tag{15}$$

где мы положили $y_i=h_{ik}y^k$. Метрики вида (14), в частности, при $a=\dfrac{1}{c^2}$ рассматривались в работе [3], а метрика (15) является локально конической метрикой, введенной автором в работе [4]. Из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Связность Картана метрик (14) и (15) совпадает со связностью Леви-Чивита тогда и только тогда, когда* $a(x) = const$.

Список литературы

1. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.,1981.

2. *Matsumoto M.* Foundation of Finsler geometry and special Finsler spaces. Otsu, Japan, 1986.

3. *Kawaguchi T., Miron R.* On the generalized Lagrange spaces with the metric $\gamma_{ij}(x)+(1/c^2)y_i y_j$ // Tensor. 1989. № 48. P.52 – 63.

4. *Паньженский В.И.* Исследование локально конических многообразий с помощью соприкасающихся римановых метрик // Геометрия погруженных многообразий // МГПИ. М., 1986. С. 65 – 70.

V. Panzhenskiy

METRICS OF FINSLERIAN TYPE NEAR TO RIEMANNIAN

On the basis of the decomposition metric tensor of Finslerian type in the Tailor row on degree of tangent vector author introduce notion generalized Lagrange and generalized Finslerian metrics near to Riemmanian in order *p*:

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk_1} y^{k_1} + \ldots + h_{ijk_1 \ldots k_p} y^{k_1} \ldots y^{k_p},$$

or

$$g_{ij}(x,y) = h_{ij} + h_{ijk_1} \frac{y^{k_1}}{\|y\|} + \ldots + h_{ijk_1 \ldots k_p} \frac{y^{k_1} \ldots y^{k_p}}{\|y\|^p},$$

where $h_{ij}(x)$ is Riemmanian metric tensor, $h_{ijk_1}(x), \ldots, h_{ijk_1 \ldots k_p}(x)$ are tensors of basis manifold, $\|y\| = \sqrt{h_{ij} y^i y^j}$ is norm of a vector y. Examples metrics of the first and second order nearless are reduced.