ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР 1973
Вып.3

С К Р Ы Д Л О В А Е.В.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве рассмотрено многообразие $\{CP\}_{21}$ [2]-двупараметрическое семейство (конгруэнция) пар фигур (CP), где C-коника, а P-точка, не инцидентная плоскости коники, при условии, что семейство (C)-конгруэнция, а (P)-линия. Построен канонический репер многообразия $\{CP\}_{21}$. Решена задача расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции, ассоциированной с многообразием $\{CP\}_{21}$, рассмотрен один из подклассов данного многообразия.

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия $\{CP\}_{21}$.

Отнесем многообразие $\{CP\}_{21}$ к реперу $R=\{\bar{A}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, где A_4-текущая точка кривой (P), A_3-точка пересечения касательной к линии (P) с плоскостью коники C (предполагается, что A_3 не инцидентна конике), A_1 и A_2-точки коники C, полярно сопряженные точке A_3 относительно этой коники.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta, \tag{1}$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа многообразия $\{CP\}_{21}$ при соответствующей нормировке вершин репера запишутся в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0; \qquad x^4 = 0, \tag{4}$$

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k; \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k; \quad \omega_3^i = \lambda^i\omega_4^3;$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k; \quad \omega_4^i = 0; \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k; \tag{5}$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = a^k\omega_k \qquad (i,j,k=1,2).$$

Здесь и в дальнейшем $\omega_i = \omega_i^4$, $i \neq j$, и по этим индексам суммирование не производится.

Единичную точку $\bar{E}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$ прямой A_1A_2 располагаем в касательной плоскости к поверхности (A_3). Последнюю нормировку вершин A_α осуществляем так, чтобы

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1. \tag{6}$$

§ 2. Многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$.

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$ назовем многообразие $\{CP\}_{21}$, которое обладает следующими свойствами:

I) существует одностороннее расслоение от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (EA_4) [1], 2) поверхность (φ) является плоскостью.

Т е о р е м а I. Многообразие $\{CP\}^{\circ}_{21}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа многообразия $\{CP\}^{\circ}_{21}$ имеет вид:

$$\begin{gathered} \omega^j_i = \Gamma^{jk}_i \omega_k ; \quad \omega^3_1 = \Gamma^{3k}_1 \omega_k ; \quad \omega^3_2 = b\,\omega^3_1 ; \\ \omega^i_3 = \omega^3_4 ; \quad \omega^4_3 = \Gamma^{4k}_3 \omega_k ; \quad \omega^i_4 = 0 ; \\ \omega^3_4 = \Gamma^{3k}_4 \omega_k ; \quad 2\,\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2 = a^k \omega_k ; \\ \omega^4_4 + \omega^1_1 - 2\,\omega^3_3 = \mu\,\omega^3_4 - \omega^2_1 ; \quad \omega^1_1 - \omega^2_2 - \omega^2_1 + \omega^1_2 = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

причем, в силу условий I), 2), выполняются следующие конечные соотношения:

$$\begin{gathered} (1+b)(\Gamma^{11}_2 \Gamma^{32}_1 - \Gamma^{12}_2 \Gamma^{31}_1) - \Gamma^{31}_4 = 0, \\ (1+b)(\Gamma^{21}_1 \Gamma^{32}_1 - \Gamma^{22}_1 \Gamma^{31}_1) + \Gamma^{32}_4 = 0, \\ \Gamma^{31}_4 [(1+b)\Gamma^{32}_1 - \Gamma^{42}_3] - \Gamma^{32}_4 [(1+b)\Gamma^{31}_1 - \Gamma^{41}_3] = 0, \\ (1+b)[(a^1 + \Gamma^{21}_1)\Gamma^{32}_1 - (a^2 + \Gamma^{22}_1)\Gamma^{31}_1] + \Gamma^{31}_4 = 0, \\ (1+b)[(a^1 + \Gamma^{11}_2)\Gamma^{32}_1 - (a^2 + \Gamma^{12}_2)\Gamma^{31}_1] - \Gamma^{32}_4 = 0, \\ 1 + b \neq 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Из анализа систем (7),(8) следует, что многообразие $\{CP\}^{\circ}_{21}$

существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Поверхность (E) является плоскостью, совпадающей с (A_3). Эта плоскость является соприкасающейся к линии (P).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из формул:

$$d\bar{A}_3 = \omega^3_4 \bar{E} + \omega^3_3 \bar{A}_3 + \omega^4_3 \bar{A}_4 , \tag{9}$$

$$d\bar{E} = (\omega^2_2 + \omega^2_1)\bar{E} + (1+b)\omega^3_1 \bar{A}_3 + (\omega_1 + \omega_2)\bar{A}_4 , \tag{10}$$

$$d[\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4] = (\omega^2_2 + \omega^2_1)[\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4] , \tag{11}$$

$$d^2\bar{A}_4 = (\omega^3_4)^2 \bar{E} + (\dots)\bar{A}_3 + (\dots)\bar{A}_4 . \tag{12}$$

Т е о р е м а 3. Огибающая поверхность плоскостей $(A_1A_2A_4)$ является фокальной для прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая точка M грани $(A_1A_2A_4)$ определяется формулой:

$$\bar{M} = b\bar{A}_1 - \bar{A}_2 , \tag{13}$$

фокальные поверхности $\bar{F} = s\bar{A}_1 + t\bar{A}_2$ конгруэнции (A_1A_2) находятся из уравнения:

$$(s + bt)(\Gamma^{32}_1 s - \Gamma^{31}_4 t) = 0 . \tag{14}$$

Координаты точки $\bar{M}$ удовлетворяют уравнению (14), откуда и следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. Пары прямолинейных конгруэнций (A_1A_3), (EA_4) односторонне расслояемы в направлении от (A_1A_3) к (EA_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия одностороннего расслоения имеют вид:

$$(1+b)(\Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32}-\Gamma_1^{22}\Gamma_1^{31})+\Gamma_4^{32}=0,$$

$$(1+b)(\Gamma_2^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_2^{12}\Gamma_1^{31})-\Gamma_4^{31}=0, \tag{15}$$

$$\Gamma_4^{31}\left[(1+b)\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{42}\right]-\Gamma_4^{32}\left[(1+b)\Gamma_1^{31}-\Gamma_3^{41}\right]=0.$$

Для многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ они выполняются в силу соотношений (8).

§ 3. Характеристическое многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$.

О п р е д е л е н и е. Характеристическим многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$ называется многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$, у которого A_3 является характеристической точкой плоскости коники C.

Для характеристического многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ имеет место тождество:

$$\omega_3^4=0, \tag{16}$$

тогда система уравнений Пфаффа, определяющая многообразие, принимает вид:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k;\quad \omega_i^3=b_i\omega_4^3;\quad \omega_3^i=\omega_4^3;$$

$$\omega_3^4=\omega_4^i=0;\quad \omega_4^3=c(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2+\omega_2^1=0; \tag{17}$$

$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=a(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_4^4+\omega_1^1-2\omega_3^3=\mu\omega_4^3-\omega_1^2,$$

причем справедливы соотношения:

$$(b_i+b_j)(\Gamma_i^{ij}-\Gamma_i^{ji})-1=0,$$

$$b_1+b_2\neq 0,\quad c\neq 0 \tag{18}$$

Анализируя систему (17) с учетом соотношений (18), убеждаемся в том, что характеристическое многообразие $\{CP\}_{21}^{\circ}$ существует и

определяется с произволом семи функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Поверхности (A_3) и (E), ассоциированные с характеристическим многообразием $\{CP\}_{21}^{\circ}$, вырождаются в плоские кривые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d\bar{A}_3=\omega_4^3\bar{E}+\omega_3^3\bar{A}_3, \tag{19}$$

$$d\bar{E}=(\omega_1^1+\omega_2^1)\bar{E}+(\omega_1+\omega_2)\left[c(b_1+b_2)\bar{A}_3+\bar{A}_4\right]. \tag{20}$$

Так как для любого натурального n

$$(d^n\bar{A}_3\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4)=0;\quad (d^n\bar{E}\bar{E}\bar{A}_3\bar{A}_4)=0, \tag{21}$$

то линии (A_3) и (E) – плоские.

Т е о р е м а 6. Прямолинейная конгруэнция (EA_4) вырождается в линейчатую поверхность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d[\bar{E}\bar{A}_4]=(\omega_1^1+\omega_2^1+\omega_4^4)[\bar{E}\bar{A}_4]+\omega_4^3\{(b_1+b_2)[\bar{A}_3\bar{A}_4]+[\bar{E}\bar{A}_3]\}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что для характеристического многообразия $\{CP\}_{21}^{\circ}$ мы имеем расслоение от конгруэнции коник C не к прямолинейной конгруэнции, а к линейчатой поверхности (EA_4) [3].

Т е о р е м а 7. Одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2^*)$, (A_iA_3), (A_iA_4) соответствует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения торсов конгруэнций (A_1A_2), (A_iA_3), (A_iA_4) имеют соответственно вид:

$$(b_2\omega_1-b_1\omega_2)(\omega_1+\omega_2)=0, \tag{23}$$

$$\omega_i(\omega_j+\omega_i)=0. \tag{24}$$

$$\omega_i^j\,(\omega_j+\omega_i)=0, \qquad (25)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Л и т е р а т у р а

I.Малаховский В.С.,Конгруэнции коник,порожденные расслояемой парой C_2 ."Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та),вып.I,1970,с.5-26.

2.Малаховский В.С.,О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.Данный сборник.

3.Похила М.М.,Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (случай пары с общими гиперплоскостями)."Дифференциальная геометрия многообразий фигур"(Труды Калининградского ун-та),вып.2,1971,с.43-54.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

Т Е Р Е Н Т Ь Е В А Е.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ ($n-2$)-МЕРНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ Γ_{n-2} ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

В работе [7] рассмотрено инвариантное оснащение $(n-2)$-мерной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n ,при построении которого используются две вырожденные гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} и $\tilde V^{n-2}_{n-1}$,ассоциированные с данной гиперполосой Γ_{n-2}.

В настоящей работе строится инвариантное оснащение регулярной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n с помощью ассоциированной с данной гиперполосой $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} [2]и связанной гиперполосы $\overset{*}{\Gamma}_{n-2}$ [4]. При исследовании применяется аналитический аппарат и терминология,введенная в работах[I]-[4].

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i,j,k,p,\tau,s=2,\ldots,n-1;$$

$$\alpha,\beta=1,2,\ldots,n+1;\quad \vartheta,\eta=2,3,\ldots,n.$$

По всем индексам,встречающимся дважды сверху и снизу,предпола-