6. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

A. Stolyarov

REMARKS TO ARTICLE OF K. POLYAKOVA «GENERALIZATION OF EXTERIOR DIFFERENTIAL BY MEANS OF VIRTUAL FUNCTION»

Some comments on the article of K. Polyakova «Generalization of exterior differential by means of virtual function» are given.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Работа посвящена двойственной геометрии нормальных связностей, индуцируемых на нормализованной гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

Ключевые слова: нормальная связность, гиперповерхность, пространство аффинной связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1,n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0,n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1,n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1]

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta_K^I + \frac{1}{2} r_{ST}^I \theta^S \wedge \theta^T, \quad D\theta_J^I = \theta_J^K \wedge \theta_K^I + \frac{1}{2} r_{JST}^I \theta^S \wedge \theta^T,$$
$$r_{(ST)}^I = 0, \quad r_{L(ST)}^I = 0, \quad \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n \neq 0;$$

r_{PQ}^I и r_{KPQ}^I — тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.

Согласно [4], пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega_{\bar{L}}^{\bar{I}}$:

$$\omega_0^I = \theta^I, \; \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K, \; \omega_I^0 = 0, \; \omega_L^I = \theta_L^I - \frac{1}{n+1}\delta_L^I \theta_K^K,$$

представляет собой расширенное пространство аффинной связности $P_{n,n} \equiv \overset{*}{A}_{n,n}$.

Рассмотрим гиперповерхность $V_{n-1} \in A_{n,n}$, заданную в репере первого порядка уравнением [1]

$$\omega_0^n = 0,$$

последовательно продолжая которое, получаем поля фундаментальных геометрических объектов второго $\{\Lambda_{kj}^n\}$, третьего $\{\Lambda_{kj}^n, \Lambda_{kjl}^n\}$ порядков и т. д. Далее будем считать гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ регулярной (то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda_{ij}^n\right| \neq 0$).

Согласно работе [3], оснащение в смысле А. П. Нордена (нормализация) [2] гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ равносильна заданию на ней полей квазитензора ν_n^i и тензора ν_i^0:

$$\begin{aligned} d\nu_n^i - \nu_n^i \omega_n^n + \nu_n^j \omega_j^i + \omega_n^i &= \nu_{nk}^i \omega_0^k, \\ d\nu_i^0 + \nu_i^0 \omega_0^0 - \nu_j^0 \omega_i^j &= \nu_{ik}^0 \omega_0^k. \end{aligned} \qquad (1)$$

В работе [6] показано, что система форм Пфаффа $\{\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{J}}\}$

$$I:\begin{cases}\overline{\omega}_0^n=\omega_0^n=0, \quad \overline{\omega}_0^i=\omega_0^i, \quad \overline{\omega}_0^0=\omega_0^0-\dfrac{\varLambda_k}{n+1}\omega_0^k,\\ \overline{\omega}_n^n=\omega_n^n-\dfrac{\varLambda_k}{n+1}\omega_0^k, \quad \overline{\omega}_n^0=\omega_n^0=0, \quad \overline{\omega}_n^i=0, \quad \overline{\omega}_i^n=-\varLambda_{ki}^n\omega_0^k,\\ \overline{\omega}_i^0=\varLambda_{ki}^n\omega_n^k, \quad \overline{\omega}_j^i=\omega_j^i+(\varLambda_n^{ik}\varLambda_{kjs}^n-\delta_j^i\dfrac{\varLambda_s}{n+1})\omega_0^s\end{cases} \quad (2)$$

определяет пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное расширенному пространству $\overset{*}{A}_{n,n}$; причем базой пространства $\overline{P}_{n,n}$ служит «тангенциальная гиперповерхность» $\overline{V}_{n-1}$ (образ, двойственный V_{n-1}).

Возьмем две системы форм Пфаффа $\left\{\overset{1}{\theta}{}_n^0, \overset{1}{\theta}{}_n^n\right\}$, $\left\{\overset{2}{\theta}{}_n^0, \overset{2}{\theta}{}_n^n\right\}$:

$$\begin{aligned}\overset{1}{\theta}{}_n^0&=\nu_n^i\omega_i^0(=0)-\nu_i^0(\nu_{nj}^i\omega_0^j-\nu_n^i\nu_n^j\omega_j^n),\\ \overset{1}{\theta}{}_n^n&=\omega_n^n+\nu_n^i\omega_i^n-\omega_0^0+\nu_i^0\omega_0^i;\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{\theta}{}_n^0&=\overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_i^0-\overline{\nu}_i^0(\overline{\nu}_{nj}^i\overline{\omega}_0^j-\overline{\nu}_n^i\overline{\nu}_n^j\overline{\omega}_j^n),\\ \overset{2}{\theta}{}_n^n&=\overline{\omega}_n^n+\overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_i^n-\overline{\omega}_0^0+\overline{\nu}_i^0\overline{\omega}_0^i;\end{aligned} \quad (4)$$

в (4) формы $\overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}}$ и функции $\overline{\nu}_n^i, \overline{\nu}_i^0$ имеют соответственно строения (2) и

$$\overline{\nu}_n^i \overset{def}{=} -\Lambda_n^{ik}\nu_k^0, \quad \overline{\nu}_i^0 \overset{def}{=} \Lambda_{ki}^n\nu_n^k. \quad (5)$$

Формы систем (3; 4) удовлетворяют структурным уравнениям Картана — Лаптева [1]:

$$\begin{aligned}D\overset{1}{\theta}{}_n^0&=\overset{1}{\theta}{}_n^n\wedge\overset{1}{\theta}{}_n^0+\frac{1}{2}\overset{1}{\Re}{}_{nst}^0\,\omega_0^s\wedge\omega_0^t, \quad D\overset{1}{\theta}{}_n^n=\frac{1}{2}\overset{1}{\Re}{}_{nst}^n\,\omega_0^s\wedge\omega_0^t,\\ D\overset{2}{\theta}{}_n^0&=\overset{2}{\theta}{}_n^n\wedge\overset{2}{\theta}{}_n^0+\frac{1}{2}\overset{2}{\Re}{}_{nst}^0\,\omega_0^s\wedge\omega_0^t, \quad D\overset{2}{\theta}{}_n^n=\frac{1}{2}\overset{2}{\Re}{}_{nst}^n\,\omega_0^s\wedge\omega_0^t;\end{aligned} \quad (6)$$

следовательно, они определяют нормальные связности [7] $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ в расслоении нормалей соответственно первого и второго родов на гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$, двойственные относительно инволютивного преобразования I форм связности по закону (2).

Замечание. Ниже предположим, что тензор ν_i^0 — ненулевой, то есть нормализация $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ отлична от аффинной [2]; в противном случае формы $\overset{1}{\theta}{}_n^0$ и $\overset{2}{\theta}{}_n^0$ связностей $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ обращаются в нуль (см. (3; 4)).

В уравнениях (6) компоненты тензора кривизны-кручения $\left\{\overset{1}{\Re}{}_{nst}^{0}, \overset{1}{\Re}{}_{nst}^{n}\right\}$, $\left\{\overset{2}{\Re}{}_{nst}^{0}, \overset{2}{\Re}{}_{nst}^{n}\right\}$ нормальных связностей $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ имеют следующее строение:

$$\overset{1}{\Re}{}_{nst}^{0} = \nu_i^0 \nu_n^i \nu_n^j R_{jst}^n - \nu_i^0 \nu_{nj}^i R_{0st}^j + 2(\nu_{n[s}^i \nu_{|it]}^0 + \nu_{i[s}^0 \Lambda_{|j|t]}^n \nu_n^i \nu_n^j +$$

$$+ \nu_{n[s}^j \Lambda_{|j|t]}^n \nu_i^0 \nu_n^i - \nu_{n[s}^l \nu_{t]}^0 \nu_l^0 + \Lambda_{j[s}^n \nu_{t]}^0 \nu_l^0 \nu_n^l \nu_n^j),$$

$$\overset{1}{\Re}{}_{nst}^{n} = \nu_n^i R_{ist}^n - R_{0st}^0 + \nu_i^0 R_{0st}^i + 2(\nu_{n[s}^i \Lambda_{|i|t]}^n - \nu_{[st]}^0); \qquad (7)$$

$$\overset{2}{\Re}{}_{nst}^{n} = \overset{1}{\Re}{}_{nst}^{n}, \ \overset{2}{\Re}{}_{nst}^{0} = \overset{1}{\Re}{}_{nst}^{0} - \nu_n^k \nu_k^0 \overset{1}{\Re}{}_{nst}^{n} - \nu_n^k \nu_i^0 R_{kst}^i - \nu_k^0 R_{nst}^k + \nu_i^0 \nu_{nj}^i R_{0st}^j .$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *На нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в расслоениях нормалей первого и второго родов индуцируются соответственно нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм $\left\{\overset{1}{\theta}{}_n^0, \overset{1}{\theta}{}_n^n\right\}$, $\left\{\overset{2}{\theta}{}_n^0, \overset{2}{\theta}{}_n^n\right\}$ и являющиеся двойственными по отношению друг к другу.*

Определение 1. *Связность $\nabla^{\perp}$ в нормальном расслоении $N(V_{n-1})$ нормализованной гиперповерхности V_{n-1} называется* *плоской [7], если параллельный перенос направления, принадлежащего нормали $N(V_{n-1})$, относительно этой связности $\nabla^{\perp}$ не зависит от пути, соединяющего две произвольно заданные точки на V_{n-1}.*

Аналитически это условие равносильно обращению в нуль тензора кривизны-кручения $\left\{\Re^{0}_{nst}, \Re^{n}_{nst}\right\}$ нормальной связности $\nabla^{\perp}$. В случае, если в нуль обращаются только подтензор $\left\{\Re^{n}_{nst}\right\}$, связность $\nabla^{\perp}$ называется полуплоской [7].

Из соотношений (7) следует

Теорема 2. *На нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ нормальные связности $\nabla^{\perp}$* и $\overline{\nabla}^{\perp}$ *могут быть полуплоскими, а в случае $A_{n,n} \equiv A_n$ — плоскими лишь одновременно.*

Система форм (4) на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в силу (1—3; 5) имеет вид:

$$\overset{2}{\theta}{}^{0}_{n} = \overset{1}{\theta}{}^{0}_{n} - \nu^{k}_{n}\nu^{0}_{k}\,\overset{1}{\theta}{}^{n}_{n} + d(\nu^{k}_{n}\nu^{0}_{k}),\ \overset{2}{\theta}{}^{n}_{n} = \overset{1}{\theta}{}^{n}_{n}\,. \tag{8}$$

В силу (8) двойственные нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$\Omega^{0}_{n} \equiv d(\nu^{k}_{n}\nu^{0}_{k}) - \nu^{k}_{n}\nu^{0}_{k}\,\overset{1}{\theta}{}^{n}_{n} = 0\,. \tag{9}$$

Чистое замыкание уравнения (9) в силу структурных уравнений Картана — Лаптева (6_2) имеет вид:

$$D\Omega^{0}_{n} \equiv -\frac{1}{2}\nu^{i}_{n}\nu^{0}_{i}\,\overset{1}{\Re}{}^{n}_{nst}\,\omega^{s}_{0} \wedge \omega^{t}_{0} = 0\,.$$

Из последних соотношений следует, что условием полной интегрируемости уравнения (9) является полуплоскость связности $\nabla^{\perp}$, а следовательно, и $\overline{\nabla}^{\perp}$. Доказана

Теорема 3. *На нормализованной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ двойственные нормальные связности $\nabla^{\perp}$* и

$\overline{\nabla}^{\perp}$ *совпадают тогда и только тогда, когда нормальная связность* $\nabla^{\perp}$ *(а следовательно, и* $\overline{\nabla}^{\perp}$*) полуплоская.*

Определение 2. *Пара, составленная из конгруэнции прямых и псевдоконгруэнции гиперпрямых в аффинном пространстве* A_n*, называется [5] односторонне расслояемой от конгруэнции к псевдоконгруэнции, если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие и существует однопараметрическое семейство гиперповерхностей, касательные гиперплоскости которых в точках пересечения с прямыми конгруэнции проходят через соответствующие плоскости псевдоконгруэнции.*

Пусть на нормали первого рода гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в аффинное пространство A_n, задана произвольная точка $K_n(A_0) = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^0 A_0$. Разложение дифференциала точки K_n по точкам A_0, K_n, N_i (точки $N_i = A_i + \nu_i^0 A_0$ определяют нормаль второго рода) с учетом (1; 3) имеет вид:

$$dK_n = (\omega_n^n + \nu_n^i \omega_i^n) K_n + (\nu_{nk}^i \omega_0^k - \nu_n^k \omega_k^n \nu_n^i + \nu_n^0 \omega_0^i) N_i +$$

$$+ (d\nu_n^0 + \overset{1}{\theta}{}_n^0 - \nu_n^0 \overset{1}{\theta}{}_n^n) A_0.$$

Приравнивая коэффициенты при A_0 к нулю, получим условие односторонней расслояемости пары нормалей первого и второго родов:

$$\Theta_n^0 \equiv d\nu_n^0 + \overset{1}{\theta}{}_n^0 - \nu_n^0 \overset{1}{\theta}{}_n^n = 0; \tag{10}$$

это уравнение должно быть вполне интегрируемым. Замыкая (10), с учетом (6) имеем

$$D\Theta_n^0 \equiv \frac{1}{2}(\overset{1}{\Re}{}_{nst}^0 - \nu_n^0 \overset{1}{\Re}{}_{nst}^n)\omega_0^s \wedge \omega_0^t = 0,$$

откуда следует, что условием полной интегрируемости уравнения (10) является выполнение соотношений

$$\overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{0}_{nst} = \nu^{0}_{n} \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{n}_{nst} . \qquad (11)$$

В силу произвольности функции ν^{0}_{n} соотношения (11) равносильны обращению в нуль тензора кривизны-кручения $\left\{\overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{0}_{nst}, \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{n}_{nst}\right\}$ связности $\nabla^{\perp}$: $\overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{0}_{nst} = \overset{1}{\mathfrak{R}}{}^{n}_{nst} = 0$. Последнее означает, что связность $\nabla^{\perp}$ является плоской. Доказана

Теорема 4. *Для того чтобы нормальная связность* $\nabla^{\perp}$*, индуцируемая на нормализованной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_n$*, была плоской, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от нормалей первого рода к нормали второго рода.*

Аналогичные рассуждения справедливы и для нормальной связности $\overline{\nabla}^{\perp}$, поэтому имеет место предложение, двойственное теореме 4:

Теорема 5. *Для того чтобы нормальная связность* $\overline{\nabla}^{\perp}$*, индуцируемая на нормализованной гиперповерхности* $V_{n-1} \subset A_n$*, была плоской, необходимо и достаточно, чтобы псевдоконгруэнция нормалей второго рода и конгруэнция нормалей первого рода составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от нормали второго рода к нормали первого рода.*

Определение 3. *Поле p-мерных плоскостей* $N_p(A_0)$ *называется параллельным в нормальной связности* $\nabla^{\perp}$ *[7], если при инфинитезимальном перемещении точки* A_0 *вдоль любой кривой, принадлежащей поверхности* $V_m \subset A_n$*, смещение p-мерной плоскости* $N_p(A_0)$ *происходит в* $(m+p)$ *-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость* $T_m(A_0)$ *и на плоскость* $N_p(A_0)$.

Так как в случае гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ для любой точки $M = A_0 + x^n N_n$ нормали первого рода $[A_0 N_n]$, $N_n = A_n + \nu_n^i A_i$, справедливо $dM = \omega_0^0 A_0 + \Omega^i A_i + \Omega^n N_n$, то доказана

Теорема 6. *На нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ поле нормалей первого рода является параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$.*

Справедливо также двойственное предложение:

Теорема 7. *На оснащенной в смысле А. П. Нордена гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ поле нормалей второго рода является параллельным в нормальной связности $\overline{\nabla}^{\perp}$.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

3. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

4. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник ЧГПУ. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

5. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. М., 1956.

6. *Христофорова А. В.* Двойственная геометрия гиперповерхности в пространстве аффинной связности // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. 2006. №3(50). С. 35—42.

7. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

A. Khristoforova

DUAL NORMAL CONNECTIONS ON THE HYPERSURFACE IN THE SPACE WITH AFFINE CONNECTION

This work is devoted to the dual geometry of normal connections on hypersurface in the space with affine connection.