УДК 514.76

***Н. А. Елисеева*[1], *Ю. И. Попов*[2]**

[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*

[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-5

Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов регулярной гиперполосы с центральным оснащением проективного пространства

В данной работе приведено задание гиперполосы CH_m с центральным оснащением в проективном пространстве P_n и доказана теорема существования. Построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы CH_m в окрестностях 1—3-го порядков. Доказано, что гиперполоса CH_m, оснащенная в смысле Э. Картана, индуцирует проективную связность, полученную путем проектирования (центром проектирования в каждой точке базисной поверхности является плоскость Картана).

Ключевые слова: гиперполоса, оснащение Картана, регулярная гиперполоса, тензор кручения-кривизны, квазитензор, геометрический объект, охват геометрического объекта, проективная связность

§ 1. Задание регулярной гиперполосы с центральным оснащением в проективном пространстве P_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J, K = \overline{1, n}\,; i, j, k, s, t, p, q = \overline{1, m}\,;$$

Поступила в редакцию 05.04.2022 г.

$$\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{s}, \tilde{p} = \overline{0,m}; \ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}.$$

Знак «$\equiv$» означает сравнение по модулю базисных форм.

Определение [8]. Гиперполоса H_m ($m \geq 2$) называется *центрально оснащенной*, если оснащающие прямые в нормалях 1-го рода базисной поверхности [8] проходят через одну точку (центр оснащения).

Центрально оснащенные гиперполосы обозначим символом CH_m. Присоединим к гиперполосе CH_m подвижной точечный репер $R^1 = \{A_J\}$ следующим образом: $A_0 \equiv A \in V_m$, где V_m — базисная поверхность гиперполосы CH_m; $\{A_i\} \subset T_m$ (здесь T_m — касательная плоскость базисной поверхности V_m в точке A_0); $\{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}$ (X_{n-m-1} — характеристика гиперполосы); A_n поместим в точку пересечения прямых $h(A_0)$, то есть $A_n \equiv P$ (P — центр оснащения).

В репере 1-го порядка R^1 регулярная гиперполоса CH_m задается уравнениями

$$\omega_0^n = 0, \ \omega_0^\alpha = 0, \ \omega_\alpha^n = 0,$$

$$\omega_n^\alpha = 0, \ \omega_n^0 = 0, \ \omega_n^i = 0, \tag{1}$$

$$\omega_i^n = \lambda_{ij}^n \omega_0^j, \ \omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j, \ \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j,$$

где

$$\nabla \lambda_{ij}^n + \lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \ \nabla \lambda_{ij}^\alpha + \lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^\alpha \omega_0^k,$$

$$\nabla \lambda_{\alpha j}^t + \lambda_{\alpha j}^t \omega_0^0 - \delta_j^t \omega_\alpha^0 = \lambda_{\alpha jk}^t \omega_0^k, \tag{2}$$

$$\lambda_{[ij]}^n = 0, \ \lambda_{[ij]}^\alpha = 0, \ \lambda_{s[i}^n \lambda_{|\alpha|j]}^s = 0.$$

Поскольку гиперполоса CH_m регулярная [1], то тензор 1-го порядка $\Lambda \overset{def}{=} \{\lambda_{ij}^n\}$ невырожденный. Для него введем обратный тензор λ_n^{ij} первого порядка:

$$\lambda_n^{ik}\lambda_{kj}^n = \delta_j^i, \ \nabla\lambda_n^{ij} - \lambda_n^{ij}\omega_0^0 - \lambda_{nk}^{ij}\omega_0^k = 0, \tag{3}$$

где

$$\lambda_{nk}^{ij} = -\lambda_n^{is}\lambda_n^{jt}\lambda_{stk}^n, \ \nabla\lambda_{stk}^n + 2\lambda_{stk}^n\omega_0^0 + \Lambda_{(st}^n\omega_{k)}^0 = \Lambda_{stkj}^n\omega_0^j. \tag{4}$$

Функция Λ есть относительный инвариант 1-го порядка:

$$d\ln\Lambda = \lambda_n^{ij}d\lambda_{ij}^n = 2\omega_k^k - m(\omega_0^0 + \omega_n^n) + \Lambda_k\omega_0^k, \Lambda_k = \lambda_n^{ij}\lambda_{ijk}^n. \tag{5}$$

Отметим, что $\Gamma_1 = \{\lambda_{ij}^n, \lambda_{ij}^\alpha, \lambda_{\alpha j}^i\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \lambda_{ijk}^n, \lambda_{ijk}^\alpha, \lambda_{\alpha jk}^i\}$, … — последовательность фундаментальных геометрических объектов [2], гиперполосы CH_m.

§ 2. Теорема существования гиперполосы CH_m

Теорема. *В проективном пространстве P_n регулярная гиперполоса с центральным оснащением CH_m (1) существует с произволом $s_m = (n-m) + m(n-m-1)$ функции m аргументов.*

Доказательство. Чистое замыкание системы (1) представим в виде

$$\Delta\lambda_{ij}^n \wedge \omega_0^j = 0, \ \Delta\lambda_{ij}^\alpha \wedge \omega_0^j = 0, \ \Delta\lambda_{\alpha j}^i \wedge \omega_0^j = 0. \tag{6}$$

Найдем характеры системы (6) [2]:

$$s_1 = m(n-m) + m(n-m-1),$$

$$s_2 = (m-1)(n-m) + m(n-m-1),$$

$$s_3 = (m-2)(n-m) + m(n-m-1),$$

$$\ldots$$

$$s_m = 1\cdot(n-m) + m(n-m-1).$$

Далее вычисляем число Э. Картана системы (6) (пусть $A = m(n-m-1)$):

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ms_m = [m(n-m) + A] + 2[(m-1)(n-m) + A] +$$
$$+ 3[(m-3)(n-m) + A] + \ldots + m[(m-(m-1))(n-m) + A] =$$
$$= A\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(n-m)(m+1)m(m+2)}{6}.$$

В силу леммы Э. Картана [2] из системы (6) следует

$$\Delta\lambda^n_{ij} = \lambda^n_{ijk}\omega^k,\ \Delta\lambda^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha_{ijk}\omega^k,\ \Delta\lambda^i_{\alpha j} = \lambda^i_{\alpha jk}\omega^k.$$

Определим число линейно независимых коэффициентов N, входящих в систему (6):

$$N = A\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(n-m)(m+1)m(m+2)}{6}.$$

Итак, $Q = N$. Система (6) находится в инволюции [12], а ее произвол определяется характером s_m, что и требовалось доказать.

§ 3. Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы CH_m в дифференциальной окрестности 2-го и 3-го порядков

1. Окрестность 2-го порядка. Продолжив уравнение (5) и введя обозначение $\tilde{\Lambda}_i = \frac{1}{m+2}\Lambda_i$, получим

$$\nabla\tilde{\Lambda}_i + \tilde{\Lambda}_i\omega^0_0 + \omega^0_i = \tilde{\Lambda}_{ij}\omega^j_0, \tag{7}$$

где $\tilde{\Lambda}_{ij} \overset{def}{=} \frac{2}{m+2}\Lambda^\alpha_{si}\Lambda^s_{\alpha j}$.

Таким образом, функция $\widetilde{\Lambda}_i$ (7) есть квазитензор 2-го порядка. Далее, используя элементы гиперполосы, строим поля тензоров a_n^α, c_{ij}^α, $b_{n\alpha}^{ij}$ и поле квазитензора e_α^0 [10]

$$a_n^\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{m}\lambda_{ij}^\alpha \lambda_n^{ij}, \; c_{ij}^\alpha \overset{def}{=} \lambda_{ij}^\alpha - a_n^\alpha \lambda_{ij}^n, \; b_{n\alpha}^{ij} \overset{def}{=} \lambda_{\alpha k}^i \lambda_n^{kj} - e_\alpha^0 \lambda_n^{ij},$$

$$e_\alpha^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha i}^i,$$

компоненты которых в силу (2, 3) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla a_n^\alpha = a_{nk}^\alpha \omega_0^k, \nabla c_{ij}^\alpha + c_{ij}^\alpha \omega_0^0 = c_{ijk}^\alpha \omega_0^k,$$

$$\nabla b_{n\alpha}^{ij} = b_{n\alpha k}^{ij} \omega_0^k, \; \nabla e_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = e_{\alpha k}^0 \omega_0^k.$$

Тензоры c_{ij}^α и $b_{n\alpha}^{ij}$ симметричны по индексам i и j.

Введем в рассмотрение следующие охваты, тем самым построим еще ряд полей геометрических объектов 2-го порядка:

$$D_{ijk}^n \overset{def}{=} \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)}, D_{ij} \overset{def}{=} \lambda_n^{ls} \lambda_n^{kt} D_{ist}^n D_{jlk}^n, \; D_n \overset{def}{=} \lambda_n^{ij} \lambda_n^{st} \lambda_n^{kl} D_{isk}^n D_{jtl}^n,$$

$$b_{\alpha k}^i \overset{def}{=} b_{n\alpha}^{ij} \lambda_{jk}^n, \; b_{\alpha\beta} \overset{def}{=} b_{\alpha j}^s b_{\beta s}^j, \; b_{n\alpha}^\beta \overset{def}{=} b_{n\alpha}^{st} c_{st}^\beta, \tag{8}$$

$$c_{nj}^{\alpha i} \overset{def}{=} c_{sj}^\alpha \lambda_n^{is}, \; c_{nn}^{\alpha\beta} \overset{def}{=} c_{ns}^{\alpha k} c_{nk}^{\beta s}.$$

Каждый из этих охватов в силу уравнений (2—4, 7, 8) образует тензор (D_n — относительный инвариант, вообще говоря, ненулевой), причем тензоры D_{ijk}^n, D_{ij}, $b_{\alpha\beta}$, $c_{nn}^{\alpha\beta}$ симметрические:

$$\nabla D_{ijk}^n + 2D_{ijk}^n \omega_0^0 = D_{ijks}^n \omega_0^s, \; D_{ijks}^n = \lambda_{ijks}^n - \lambda_{s(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)} - \lambda_{(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)s}, \tag{9}$$

$$\nabla D_{ij} + 2D_{ij}\omega_0^0 \equiv 0,$$

$$d \ln D_n + \omega_0^0 - \omega_n^n = D_k \omega_0^k \,, \tag{10}$$

$$\nabla b_{\alpha k}^i + b_{\alpha k}^i \omega_0^0 \equiv 0 \,,\ \nabla b_{\alpha\beta} + 2 b_{\alpha\beta} \omega_0^0 \equiv 0 \,,$$

$$\nabla b_{n\alpha}^\beta + b_{n\alpha}^\beta \omega_0^0 \equiv 0 \,,$$

$$\nabla c_{nj}^{\alpha i} \equiv 0 \,,\ \nabla c_{nn}^{\alpha\beta} \equiv 0 \,.$$

Отметим, что тензоры D_{ij}, $b_{n\alpha}^\beta$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{nn}^{\alpha\beta}$ в общем случае невырожденные. Следовательно, можно построить взаимные им тензоры 2-го порядка. Например,

$$b_\gamma^{n\beta} b_{n\alpha}^\gamma = b_\alpha^{n\gamma} b_{n\gamma}^\beta = \delta_\alpha^\beta \,,\ \nabla b_\alpha^{n\beta} - b_\alpha^{n\beta} \omega_0^0 \equiv 0 \,,$$

$$D^{ik} D_{kj} = \delta_j^i \,,\ \nabla D^{ij} - 2 D^{ij} \omega_0^0 \equiv 0 \,. \tag{11}$$

В дифференциальной окрестности 2-го порядка построим охваты, необходимые нам для дальнейшего изложения:

$$B_{\alpha\beta}^n \overset{def}{=} -\frac{1}{2}\left(b_\alpha^{n\gamma} b_{\gamma\beta} + b_\beta^{n\gamma} b_{\gamma\alpha}\right),\ \nabla B_{\alpha\beta}^n + B_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = B_{\alpha\beta k}^n \omega_0^k \,,$$

$$b_\alpha \overset{def}{=} -\left(B_{\beta\alpha}^n a_n^\beta + e_\alpha^0\right),\ \nabla b_\alpha + b_\alpha \omega_0^0 + \omega_\alpha^0 \equiv 0 \,, \tag{12}$$

$$\eta_{nk} \overset{def}{=} \lambda_n^{is} \lambda_n^{jt} D_{kst}^n c_{ij}^\alpha e_\alpha^0 \,,\ \nabla \eta_{nk} + 2 \eta_{nk} \omega_0^0 - \lambda_n^{is} \lambda_n^{jt} D_{kst}^n c_{ij}^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0 \,,$$

$$\mu_{nk} \overset{def}{=} D_{kij}^n b_{n\alpha}^{ij} a_n^\alpha \,,\ \nabla \mu_{nk} + 2 \mu_{nk} \omega_0^0 \equiv 0 \,.$$

2. Окрестность 3-го порядка. Построим систему охватов, связанных с 3-й дифференциальной окрестностью элемента гиперполосы $CH_m \subset P_n$. Продолжая уравнения (7, 10), получим уравнения для функций $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, D_k:

$$\nabla \widetilde{\Lambda}_{ij} + 2 \widetilde{\Lambda}_{ij} \omega_0^0 + \widetilde{\Lambda}_{(i} \omega_{j)}^0 + \lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0 \,,$$

$$\nabla D_i + D_i \omega_0^0 + \omega_i^0 \equiv 0 \,.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\widetilde{T}_n \overset{def}{=} (\widetilde{\Lambda}_{ij} - \widetilde{\Lambda}_i \widetilde{\Lambda}_j)\lambda_n^{ij}, S_n \overset{def}{=} \frac{1}{m}\widetilde{T}_n - a_n^\alpha b_\alpha,$$

которые, согласно (3, 7, 8, 12), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \widetilde{T}_n + \widetilde{T}_n \omega_0^0 + m a_n^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0, \nabla S_n + S_n \omega_0^0 = S_{nk}\omega_n^k.$$

Следует отметить, что система функций $\left\{\lambda_{ij}^n, \widetilde{\Lambda}_i, B_{\alpha\beta}^n, b_\alpha, S_n\right\}$ образует поле геометрических объектов 3-го порядка на регулярной гиперполосе $CH_m \subset P_n$. Известно [6; 11], что эта система определяет поле инвариантных соприкасающихся с гиперполосой гиперквадрик, уравнения которых относительно репера 1-го порядка имеют вид

$$\lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\widetilde{\Lambda}_i x^i x^n + B_{\alpha\beta}^n x^\alpha x^\beta + 2b_\alpha x^\alpha x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \quad (13)$$

Замечание 1. Относительно гиперквадрик (13) в каждой точке $A_0 \in V_m$ касательная плоскость $T_m(A_0)$ и характеристика $X_{n-m-1}(A_0)$ полярно сопряжены [7].

Замечание 2. Обращение в нуль тензора Дарбу D_{ijk}^n (9) есть условие соприкосновения 3-го порядка гиперквадрик (13) с гиперполосой $CH_m \subset P_n$, то есть в каждой точке $A_0 \in V_m$ гипреквадрике (13) принадлежат точки

$$A_0,\ A_0 + dA_0,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + \frac{1}{3!}d^3 A_0.$$

Поле геометрического объекта $\left\{\lambda_{ij}^n, \widetilde{\Lambda}_i\right\}$ устанавливает между полями нормалей ν_n^i, ν_i^0 1-го и 2-го рода гиперполосы CH_m полярное соответствие (взаимность) относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (13) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение [8]

$$\nu_i^0 = \widetilde{\Lambda}_i + \lambda_{ik}^n \nu_n^k. \quad (14)$$

Наконец, в 3-й дифференциальной окрестности введем новые функции:

$$V_{ij} \stackrel{def}{=} \widetilde{\Lambda}_{ij} + \widetilde{\Lambda}_i \widetilde{\Lambda}_j - \frac{1}{m}\widetilde{T}_n \lambda^n_{ij}, W_{nk} \stackrel{def}{=} \lambda^{is}_n \lambda^{jt}_n V_{ij} D^n_{kst} + (\eta_{nk} - \mu_{nk}),$$

$$W^i_n \stackrel{def}{=} D^{ik} W_{nk}, \; F^i_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\lambda^{ik}_n (D_k - \widetilde{\Lambda}_k), \; J^i_n = W^i_n + F^i_n,$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\nabla V_{ij} + 2V_{ij}\omega^0_0 + c^\alpha_{ij}\omega^0_\alpha \equiv 0, \; \nabla W_{nk} + 2W_{nk}\omega^0_0 \equiv 0,$$

$$\nabla W^i_n = W^i_{nk}\omega^k_0, \; \nabla F^i_n = F^i_{nk}\omega^k_0, \; \nabla J^i_n = 0. \qquad (15)$$

Заметим, что функция $J = D^n_{ijk} D^{ij} (W^k_n + F^k_n)$ [8] есть абсолютный инвариант 3-го порядка гиперполосы $CH_m \subset P_n$, так как в силу (9, 11, 15) имеем $\nabla J = 0$.

Замечание 3. Требование инвариантности поля нормали $N_{n-m}(\nu)$ первого рода гиперполосы CH_m приводит к условию

$$\nabla \nu^i_n = \nu^i_{nj}\omega^j_0,$$

а требование инвариантности поля $N_{m-1}(\nu)$ нормалей 2-го рода приводит к условию

$$\nabla \nu^0_i + \omega^0_i = \nu^0_{ik}\omega^k_0.$$

В качестве охвата объекта $\{\nu^i_n\}$ можно взять любой из тензоров W^i_n, F^i_n, J^i_n. Например, пусть для определенности $\nu^i_n \stackrel{def}{=} W^i_n$. Тогда по формуле (14) находим охват объекта $\{\nu^0_i\}$:

$$\nu^0_i = W^0_i \stackrel{def}{=} \widetilde{\Lambda}_i + \lambda^n_{ip} W^p_n.$$

§ 4. Проективная связность на оснащенной гиперполосе CH_m

Определение. Гиперполоса CH_m *оснащена в смысле Э. Картана* [8], если каждой точке $A_0 \in V_m$ поставлена в соответствие плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ размерности $n-m-1$, не имеющая общей точки с касательной плоскостью $T_m(A_0)$.

Плоскость $K_{n-m-1} = [K_\alpha, K_n]$ в каждой точке $A_0 \in V_m$ можно задать следующим образом:

$$K_\alpha = \nu_\alpha^0 A_0 + A_\alpha\,,\; K_n = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^i A_i + \nu_n^\alpha A_\alpha + A_n\,, \qquad (16)$$

где

$$\nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha k}^0 \omega_0^k\,,\; \nabla \nu_n^0 + \nu_n^i \omega_i^0 + \nu_n^\alpha \omega_\alpha^0 = \nu_{nk}^0 \omega_0^k\,, \qquad (17)$$

$$\nabla \nu_n^i = \nu_{nk}^i \omega_0^k\,,\; \nabla \nu_n^\alpha = \nu_{nk}^\alpha \omega_0^k\,.$$

Охваты функций в (16) имеют вид

$$\nu_\alpha^0 = e_\alpha^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha i}^i\,,\; \nu_n^i = W_n^i\,,\; \nu_n^\alpha \overset{def}{=} a_n^\alpha = -\frac{1}{m}\lambda_{ij}^\alpha \lambda_n^{ij}\,, \qquad (18)$$

$$\nu_n^0 = W_i^0 W_n^i + e_\alpha^0 a_n^\alpha\,.$$

В силу сказанного оснащение гиперполосы CH_m в смысле Э. Картана равносильно заданию на гиперполосе CH_m полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^i, e_\alpha^0, \nu_n^\alpha\}$, при этом в каждой точке $A_0 \in V_m$ оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ пересекает характеристику $X_{n-m-1}(A_0)$ по оси Кёнигса $K_{n-m-2} = [K_\alpha = e_\alpha^0 A_0 + A_\alpha]$ [8; 9].

Известно [3], что при $m>1$ оснащающие плоскости Э. Картана $K_{n-m-1}(A_0)$ неподвижны при любом смещении A_0 тогда и только тогда, когда ее смещение не выходит за пределы нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$.

Проективную связность на гиперполосе CH_m определим при помощи системы форм $\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, которые получаются из форм $\omega_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, ω_0^i следующим преобразованием [2]:

$$\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \omega_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} - \Gamma_{\tilde{j}k}^{\tilde{i}} \omega_0^k . \tag{19}$$

Преобразованные формы $\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$ (19) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} \wedge \widetilde{\omega}_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} + \omega_0^k \wedge \Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}},$$

где

$$\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} = d\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} + \Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}\omega_0^0 - \Gamma_{\tilde{s}k}^{\tilde{j}}\omega_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} + \Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{s}}\omega_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} - \Gamma_{\tilde{i}s}^{\tilde{j}}\omega_k^s - \Gamma_{\tilde{s}p}^{\tilde{j}}\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{s}}\omega_0^p + \lambda_{\tilde{i}k}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\tilde{j}} .$$

Здесь для удобства записи мы ввели обозначение $\lambda_{0k}^{\alpha} = 0$. Формы $\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$, ω_0^k образуют вполне интегрируемую систему и определяют на базисной поверхности $V_m \subset CH_m$ поле геометрического объекта $\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$. Этот объект $\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$ мы будем называть объектом проективной связности Γ (19) гиперполосы CH_m.

Для того чтобы формы $\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$ определяли проективную связность на гиперполосе CH_m, необходимо и достаточно [2], чтобы было задано поле объекта связности $\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$:

$$\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} = \Gamma_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p , \tag{20}$$

тогда

$$D\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} \wedge \widetilde{\omega}_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} + R_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}} \omega_0^k \wedge \omega_0^p ,$$

где $R_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}} = \Gamma_{\tilde{i}\,[kp]}^{\tilde{j}}$ — тензор кручения-кривизны проективной связности гиперполосы CH_m.

Будем полагать, что гиперполоса $CH_m \subset P_n$ оснащена в смысле Э. Картана [13]. Построим для этой гиперполосы CH_m проективную связность Γ, внутренне определенную самой гиперполосой CH_m, то есть охват объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{\tilde{i}\,k}^{\tilde{j}}\}$ фундаментальными объектами гиперполосы CH_m [4; 5].

Предварительно распишем систему дифференциальных уравнений (20):

$$\nabla\Gamma_{0k}^{j} + \Gamma_{0k}^{j}\omega_0^0 = \widetilde{\Gamma}_{0kp}^{j}\omega_0^p ,$$

$$\nabla\Gamma_{0k}^{0} + \Gamma_{0k}^{0}\omega_0^0 + \Gamma_{0k}^{i}\omega_i^0 = \widetilde{\Gamma}_{0kp}^{0}\omega_0^p ,$$

$$\Delta\Gamma_{ik}^{0} + \Gamma_{ik}^{0}\omega_0^0 - \Gamma_{0k}^{0}\omega_i^0 - \Gamma_{ik}^{q}\omega_q^0 + \lambda_{ik}^{\alpha}\omega_\alpha^0 = \widetilde{\Gamma}_{ikp}^{0}\omega_0^p ,$$

$$\Delta\Gamma_{ik}^{j} + \Gamma_{ik}^{j}\omega_0^0 - \Gamma_{0k}^{j}\omega_i^0 = \widetilde{\Gamma}_{ikp}^{j}\omega_0^p ,$$

где правые части $\widetilde{\Gamma}_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p$ состоят из первоначальных членов $\Gamma_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p$ и членов, содержащих главные формы ω_0^p, которые перенесены из левых частей уравнений (20).

Охват объекта проективной связности Γ осуществим по формулам

$$\Gamma_{0k}^{0} = 0 ,\ \Gamma_{0k}^{j} = 0 ,\ \Gamma_{ik}^{j} = a_{ik}^{n}\nu_n^{j} ,\ \Gamma_{ik}^{0} = a_{ik}^{n}\nu_n^{0} + \lambda_{ik}^{\alpha}\nu_\alpha^{0} - a_{ik}^{n}a_n^{\alpha}a_\alpha^{0} . \quad (21)$$

Таким образом, формы проективной связности $\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, внутренним образом присоединенные к гиперполосе CH_m, имеют вид

$$\widetilde{\omega}_0^i = \omega_0^i,\ \widetilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0,\ \widetilde{\omega}_i^j = \omega_i^j - a_{ik}^n \nu_n^j \omega_0^k, \tag{22}$$

$$\widetilde{\omega}_i^0 = \omega_i^0 - (a_{ik}^n \nu_n^0 - a_{ik}^n a_n^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{ik}^\alpha \nu_\alpha^0)\omega_0^k.$$

Из соотношений (21) с учетом уравнений (1, 2, 17, 18) получаем следующие выражения для коэффициентов $\widetilde{\Gamma}_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}$:

$$\widetilde{\Gamma}_{0kp}^j = 0,\ \widetilde{\Gamma}_{0kp}^0 = 0,\ \widetilde{\Gamma}_{ikp}^j = a_{ikp}^n \nu_n^j + a_{ik}^n \nu_{np}^j,$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ikp}^0 = a_{ikp}^n \nu_n^0 + a_{ik}^n \nu_{np}^0 - a_{ikp}^n a_n^\alpha e_\alpha^0 - a_{ik}^n a_{np}^\alpha e_\alpha^0 -$$
$$- a_{ik}^n a_n^\alpha e_{\alpha p}^0 + \lambda_{ikp}^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{ik}^\alpha \nu_{\alpha p}^0.$$

Учитывая построенные выше охваты (21) компонент объекта проективной связности Г, находим охваты компонент тензора кручения-кривизны $R_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}$:

$$R_{0kp}^j = 0,\ R_{0kp}^0 = 0,$$

$$R_{ikp}^j = 2[a_{i[k}^n \nu_{|n|p]}^j + a_{i[k}^n \delta_{p]}^j \nu_n^o - a_{i[k}^n \delta_{p]}^j a_n^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{i[k}^\alpha \delta_{p]}^j \nu_\alpha^0 +$$
$$+ \lambda_{i[k}^\alpha \lambda_{|\alpha|p]}^j + a_{q[k}^n a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_n^j],$$

$$R_{ikp}^0 = 2[a_{i[k}^n \nu_{|n|p]}^0 - a_{i[k}^n a_{|n|p]}^\alpha \nu_\alpha^0 - a_{i[k}^n \nu_{|\alpha|p]}^0 a_n^\alpha + \lambda_{i[k}^\alpha \nu_{|\alpha|p]}^0 +$$
$$+ a_{q[k}^n a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_n^0 + \lambda_{q[k}^\alpha a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_\alpha^0 - a_{q[k}^n a_{p]i}^n a_n^\alpha \nu_\alpha^0 \nu_n^q].$$

Покажем, что построенная связность Г относится к классу проективных связностей, определяемых путем проектирования. Действительно, при определяющем связность отображении

$$A_K(u + du) \to A_K(u, du) = A_K(u) + \omega_K^J A_J(u) + [2]$$

образом касательной плоскости $T_m(u + du) = [A_{\tilde{i}}(u + du)]$ является плоскость $T_m(u, du) = [A_{\tilde{i}}(u, du)]$:

$$A_{\tilde{i}}(u + du) \to A_{\tilde{i}}(u, du) = A_{\tilde{i}}(u) + \omega_{\tilde{i}}^K A_K(u) + [2]. \tag{23}$$

Спроектируем на касательную плоскость $T_m(u)=[A_{\tilde{i}}(u)](A_0)$ образ $[A_{\tilde{i}}(u,du)]$ соседней касательной плоскости $T_m(u+du)=[A_{\tilde{i}}(u+du)]$, приняв оснащающую плоскость $K_{n-m-1}(A_0)=[K_\alpha, K_n]$ за центр проектирования. Эта проекция определяется отображением

$$\begin{aligned} A_{\tilde{i}}(u,du) &\to \widetilde{A}_{\tilde{i}}(u,du)=A_{\tilde{i}}(u,du)+l^\alpha_{\tilde{i}}K_\alpha+l^n_{\tilde{i}}K_n= \\ &=A_{\tilde{i}}(u)+\omega^{\tilde{k}}_{\tilde{i}}A_{\tilde{k}}+\omega^\alpha_{\tilde{i}}A_\alpha+\omega^n_{\tilde{i}}A_n+l^\alpha_{\tilde{i}}K_\alpha+l^n_{\tilde{i}}K_n= \\ &=A_{\tilde{i}}(u)+(\omega^k_{\tilde{i}}+l^n_{\tilde{i}}\nu^k_n)A_k+(l^n_{\tilde{i}}\nu^0_n+l^\alpha_{\tilde{i}}\nu^0_\alpha+\omega^0_{\tilde{i}})A_0+ \\ &+(\omega^\alpha_{\tilde{i}}+l^n_{\tilde{i}}a^\alpha_n+l^\alpha_{\tilde{i}})A_\alpha+(\omega^n_{\tilde{i}}+l^n_{\tilde{i}})A_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Коэффициенты $l^\alpha_{\tilde{i}}$, $l^n_{\tilde{i}}$ определим из условия: проекции $\widetilde{A}_{\tilde{i}}(u,du)$ вершин $A_{\tilde{i}}(u,du)$ должны располагаться в касательной плоскости $T_m(u)=[A_{\tilde{i}}(u)]$, то есть в разложении (24) должны отсутствовать члены, содержащие A_α и A_n. В результате получим, что

$$l^n_0=0\,,\ l^\alpha_0=0\,,\ l^n_i=-a^n_{ij}\omega^j_n\,,\ l^\alpha_i=-\lambda^\alpha_{ip}\omega^p_0+a^n_{ip}a^\alpha_n\omega^p_0\,. \tag{25}$$

Итак, суперпозиция отображений (23) и (24) задает отображение, определяющее проективную связность Γ для гиперполосы CH_m (здесь мы учитываем соотношения (25)):

$$A_{\tilde{i}}(u,du)\to\widetilde{A}_{\tilde{i}}(u,du)=A_{\tilde{i}}(u)+\widetilde{\omega}^{\tilde{p}}_{\tilde{i}}A_{\tilde{p}}\,.$$

Формы (22), определяющие главную часть полученного отображения, и являются формами проективной связности на гиперполосе CH_m, определенной путем проектирования. Объект этой связности Γ определяется формулами (22), что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда. М., 1961. Т. 2. С. 226—236.

4. *Попов Ю. И.* Введение проективных связностей на *SH*-распределении проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2017. №1. С. 5—15.

5. *Попов Ю. И.* Введение связностей на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$ // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2018. №1. С. 18—24.

6. *Попов Ю. И.* Общая теория регулярных гиперполос : учеб. пособие. Калининград, 1983.

7. *Попов Ю. И.* Соприкасающиеся гиперквадрики кооснащенной гиперполосы ${}^{s}H_{m}$ // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 126—132.

8. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространства : учеб. пособие. Калининград, 2011.

9. *Попов Ю. И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

10. *Попов Ю. И.* О полях геометрических объектов Δ-оснащенной гиперповерхности проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2017. №4. С. 16—23.

11. *Столяров А. В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Математика. 1979. Вып. 10. С. 97—99.

12. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

13. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147—159.

MSC 2010: 58A05, 53A20

N. A. Eliseeva[1], *Yu. I. Popov*[2]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-5

Fields of fundamental and embracing geometric objects of a regular hyperband with central framing of a projective space

Submitted on April 5, 2022

The study of hyperbands and their generalizations in spaces with different fundamental groups is of great interest in connection with numerous applications in mathematics and physics. In this paper, we study a special class of hyperbands, i. e., centrally equipped hyperbands. A hyperband H_m ($m \geq 2$) is said to be centrally rigged if the rigging lines in the normals of the 1st kind of the base surface pass through one (the center of the rigging).

The article gives a task of a centrally equipped hyperband in the 1st order frame. A sequence of fundamental geometric objects of a hyperstrip with central framing is constructed. An existence theorem for a hyperband with a central framing is proved. It is proved that a hyperstrip with central framing and framing in the sense of Cartan induces a projective connection obtained by projection, where the projection center at each point is the Cartan plane. The spans of the components of the curvature-torsion tensor of the constructed connection are found.

Keywords: hyperstrip, Cartan equipment, regular hyperstrip, torsion-curvature tensor, quasitensor, geometric object, envelopment of a geometric object, projective connection

References

1. *Vagner, V. V.:* The theory of the field of local hyperbands. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

3. *Laptev, G. F.:* Manifolds immersed in generalized spaces. Tr. 4th Vses. Math. Congress, 2, 226—236 (1961).

4. *Popov, Yu. I.:* Introduction of projective connections on the *SH*-distribution of a projective space. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 1, 5—15 (2017).

5. *Popov, Yu. I.:* Introduction of connections on the hypersurface $\Omega(\Delta)$. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 1, 18—24 (2018).

6. *Popov, Yu. I.:* General theory of regular hyperbands. Kaliningrad (1983).

7. *Popov, Yu. I.:* Contigious hyperquadrics of coequipped hyperbands ${}^{s}H_{m}$. DGMF. Kaliningrad. 50, 126—132 (2019).

8. *Popov, Yu. I., Stolyarov, A. V.:* Special classes of regular hyperbands in a projective space. Kaliningrad (2011).

9. *Popov, Yu. I.:* Hyperstrip distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Popov, Yu. I.:* On the fields of geometric objects of a Δ-framed hypersurface of a projective space. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 4, 16—23 (2017).

11. *Stolyarov, A. V.:* On fundamental objects of a regular hyperband. Izv. Vuzov. Math., 10, 97—99 (1979).

12. *Finikov, S. P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

13. *Cartan E.*: Les espaces a connexion projective. Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal., 4, 147—159 (1937).