ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

К ВОПРОСУ О ПОЧТИ КОНТАКТНОМ ВЛОЖЕНИИ В МНОГООБРАЗИЕ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Е.В.Опольская, Н.Д.Поляков
(Черновицкий университет,
Чебоксарский пединститут)

В работе [2] одним из авторов рассматривался вопрос о почти контактном погружении нечетномерного подмногообразия в многообразие почти контактной структуры. В настоящей работе этот вопрос изучен с более общих позиций, и полученный результат в [2] можно рассматривать как непосредственно следующий из теоремы, полученной в данной работе, при определенных требованиях.

1. Пусть M_{n+1} -нечетномерное дифференцируемое многообразие со структурными формами ω^I ($I, J, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1$): $d\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I_K$.

Предположим, что на M_{n+1} задана почти контактная структура со структурными объектами φ, ξ, η [3]:

$$\varphi^I_J \varphi^J_K = -\delta^I_K + \xi^I \eta_K, \quad \varphi^I_J \eta_I = 0, \qquad \varphi^I_J \xi^J = 0, \quad \xi^I \eta_I = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим m-мерное дифференцируемое подмногообразие M_m (m-нечетное), вложенное в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, которое определено системой дифференциальных уравнений:

$$\omega^I = \Lambda^I_i \theta^i \quad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где θ^i-параметрические формы и

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j. \tag{3}$$

Функции Λ^I_i удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\Lambda^I_i - \Lambda^I_j \theta^j_i + \Lambda^J_i \omega^I_J = \Lambda^I_{ij} \theta^j. \tag{4}$$

Геометрический объект $\{\Lambda^I_i\}$ называется фундаментальным объектом первого порядка поверхности M_m. В каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ определяется системой линейно независимых векторов $\vec{\Lambda}_i = \Lambda^I_i \vec{e}_I$ ($\vec{e}_I$ -векторный репер в $T_x(M_m)$).

Поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ оснастим полем $N(M_m)$ нормалей. В каждой точке $x \in M_m$ элемент поля определяется системой $(n+1-m)$ линейно независимых векторов $\vec{N}_\alpha = N^I_\alpha \vec{e}_I$ ($\alpha, \beta, \ldots = m+1, \ldots, n+1$). Функции N^I_α удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dN^I_\alpha - N^I_\beta \vartheta^\beta_\alpha + N^K_\alpha \omega^I_K = N^I_{\alpha i} \theta^i. \tag{5}$$

Формы $\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j |_{\theta^i=0}$ являются инвариантными формами группы $\mathcal{D}^1_m$ [1], а формы $\bar{\vartheta}^\beta_\alpha = \vartheta^\beta_\alpha |_{\theta^i=0}$ -инвариантными формами полной **линейной** группы $GL(n+1-m, R)$.

Т е о р е м а ([3], §5). Если поверхность M_m, погруженная в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащена полем плоскостей $N_x(M_m)$, то на M_m естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура.

Структурные объекты этой $(f, \xi\eta\rho)$ -структуры: f^i_j,

$\xi^i_A = \{\xi^i_\alpha, \xi^i_{n+2}\}$, $\eta^A_j = \{\eta^\alpha_j, \eta^{n+2}_j\}$, $\rho^A_B = \{\rho^\beta_\alpha, \rho^{n+2}_\alpha, \rho^B_{n+2}, \rho^{n+2}_{n+2} = 0\}$,

($A, B, \ldots = m+1, \ldots, n+2$)

определяются из разложения векторов $\varphi\vec{\Lambda}_i, \varphi\vec{N}_\alpha, \vec{\xi}$ по векторам базиса $\{\vec{\Lambda}_i, \vec{N}_\alpha\}$:

$$\varphi\vec{\Lambda}_i = f^j_i \vec{\Lambda}_j + \eta^\alpha_i \vec{N}_\alpha, \tag{6}$$

$$\varphi\vec{N}_\beta = -\xi^i_\beta \vec{\Lambda}_i + \rho^\alpha_\beta \vec{N}_\alpha, \tag{7}$$

$$\vec{\xi} = \xi^j_{n+2} \vec{\Lambda}_j - \rho^\alpha_{n+2} \vec{N}_\alpha, \tag{8}$$

а также из равенств

$$\eta^{n+2}_i = \eta_I \Lambda^I_i, \quad \rho^{n+2}_\alpha = \eta_I N^I_\alpha. \tag{9}$$

Компоненты $f^i_j, \eta^A_i, \xi^i_A, \rho^A_B$ удовлетворяют (см.[3],(5.24)) соотношениям $f^i_j f^j_k = -\delta^i_k + \xi^i_A \eta^A_k$, $f^i_j \xi^j_A = -\rho^B_A \xi^i_B$,

$$f^i_j \eta^A_i = -\rho^A_B \eta^B_j, \quad \rho^A_B \rho^B_C = -\delta^A_C + \xi^i_C \eta^A_i. \qquad (10)$$

Функции η^α_i определяют на M_m поле геометрического объекта, присоединенного к группе $\mathcal{D}^1_m \times GL(n+1-m, R)$:

$$d\eta^\alpha_i - \eta^\alpha_j \theta^j_i + \eta^\beta_i \vartheta^\alpha_\beta = \eta^\alpha_{ik}\theta^k, \qquad (11)$$

а функции η^{n+2}_i -поле геометрического объекта, присоединенного к $\mathcal{D}^1_m$:

$$d\eta^{n+2}_i - \eta^{n+2}_j \theta^j_i = \eta^{n+2}_{ik}\theta^k. \qquad (12)$$

В каждой точке $x \in M_m$ объект $\{\eta^\alpha_i\}$ определяет в $T_x(M_m)$ пучок $(n+1-m)$ гиперплоскостей с инвариантной осью η^α_x, а объект $\{\eta^{n+2}_i\}$ -гиперплоскость η^{n+2}_x. В локальной системе координат $R(\vec{\lambda}_i, \vec{N}_\alpha)$ плоскость η^α_x задается системой уравнений

$$\eta^\alpha_i x^i = 0, \quad x^\alpha = 0, \qquad (13)$$

а плоскость η^{n+2}_x -системой уравнений

$$\eta^{n+2}_i x^i = 0, \quad x^\alpha = 0. \qquad (14)$$

Обозначим через η^A_x ось пучка плоскостей, определенного в точке $x \in M_m$ геометрическим объектом $\{\eta^A_i\}$. Распределение η^A плоскостей η^A_x на M_m инвариантно относительно действия аффинора φ [3].

2. Допустим, что касательная плоскость $T_x(M_m)$ поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ содержит $(m-1)$-мерное векторное подпространство, инвариантное относительно действия аффинора φ. При таком допущении пучок плоскостей η^A_x вырождается в гиперплоскость, совпадающую с плоскостью η^{n+2}_x. В этом случае гиперплоскость η^{n+2}_x является φ-инвариантной, т.е. $\varphi\eta^{n+2}_x \subset \eta^{n+2}_x$. Следовательно, компоненты η^α_i линейно выражаются через η^{n+2}_x:

$$\eta^\alpha_i = \gamma^\alpha \eta^{n+2}_i, \qquad (15)$$

где γ^α -некоторые функции, удовлетворяющие уравнениям

$$d\gamma^\alpha + \gamma^\beta \vartheta^\alpha_\beta = \gamma^\alpha_i \theta^i. \qquad (16)$$

Поле геометрического объекта $\{\gamma^\alpha\}$ определяет на M_m поле вектора $\vec{c} = \gamma^\alpha \vec{N}_\alpha$.

П р е д л о ж е н и е 1. Вектор $\vec{c}_x$ в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит плоскости структурного распределения η тогда и только тогда, когда абсолютный инвариант

$$\varkappa = \gamma^\beta \rho^{n+2}_\beta \qquad (17)$$

тождественно равен нулю.

Система величин $\mathcal{D}^i = \gamma^\alpha \xi^i_\alpha + \xi^i_{n+2}$ определяет в каждой точке $x \in M_m$ геометрический объект, присоединенный к $\mathcal{D}^1_m$. Поле этого объекта определяет на M_m поле вектора $\vec{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^i \vec{\lambda}_i$.

П р е д л о ж е н и е 2. Распределение η^{n+2} и поле вектора $\vec{\mathcal{D}}$ определяют в касательном расслоении π-структуру.

Действительно, свернув $\mathcal{D}^i$ с η^{n+2}_i, получим: $\eta^{n+2}_i \mathcal{D}^i = 1 + \varkappa^2 \neq 0$.

Т е о р е м а. Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость η^{n+2}_x φ-инвариантна, то на M_m естественным образом индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура коранга 1 со структурными объектами $f^i_j, \mathcal{D}^i, \eta^{n+2}_i, \varkappa$.

Действительно, из (1),(10),(15),(17) следуют равенства:

$$f^i_j f^j_k = -\delta^i_k + \mathcal{D}^i \eta^{n+2}_k, \quad f^i_j \mathcal{D}^j = -\varkappa \mathcal{D}^i,$$
$$f^i_j \eta^{n+2}_i = -\varkappa \eta^{n+2}_j, \quad \mathcal{D}^i \eta^{n+2}_i = 1 + \varkappa^2. \qquad (18)$$

Очевидно, что если $\varkappa = 0$, то на M_m индуцируется почти контактная структура.

С л е д с т в и е. Если в каждой точке $x \in M_m$ гиперплоскость η^{n+2}_x φ-инвариантна и вектор $\vec{c}_x$ принадлежит η_x, то на M_m естественным образом индуцируется почти контактная структура со структурными объектами: $f^i_j, \mathcal{D}^i, \eta^{n+2}_i$.

3. Рассмотрим случай, когда структурный вектор ξ_x принадлежит в каждой точке $x \in M_m$ касательной плоскости $T_x(M_m)$. При этом из (8) следует, что $\rho^\alpha_{n+2} = 0$. Свернув (15) с ξ^i_{n+2}, получим, что если $\rho^\alpha_{n+2} = 0$, то $\gamma^\alpha = 0$ и $\varkappa = 0$. Равенство нулю компонент η^α_i означает φ- инвариантность поверхности M_m (см.(6)). Из изложенного выше следует, что известная теорема (см.[3]), утверждающая, что на φ-инвариантной поверхности M_m, каждая касательная плоскость которой содержит вектор ξ_x, естественным образом индуцируется почти контактная структура, непосредственно следует из доказанной теоремы.

4. Предположим, что в каждой касательной плоскости $T_x(M_m)$

векторы $\vec{\xi}_\alpha = \xi^i_\alpha \vec{\Lambda}_i$ коллинеарны вектору $\vec{\xi}_{n+2} = \xi^i_{n+2} \vec{\Lambda}_i$. При таком предположении

$$\xi^i_\alpha = \gamma_\alpha \xi^i_{n+2}, \tag{19}$$

где γ_α -некоторые функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$d\gamma_\alpha - \gamma_\beta \vartheta^\beta_\alpha = \gamma_{\alpha i} \theta^i. \tag{20}$$

При этом вектор $\vec{\mathcal{D}}$ коллинеарен вектору $\vec{\xi}_{n+2}$, т.е. $\mathcal{D}^i = \sigma \xi^i_{n+2}$, где $\sigma = \gamma^\alpha \gamma_\alpha + 1$ -поле отличного от нуля абсолютного инварианта на M_m. При выполнении условий (19) в силу теоремы на M_m индуцируется $(f\xi\eta\rho)$ -структура коранга 1 со структурными объектами f^i_j, $\mathcal{D}^i = \sigma \xi^i_{n+2}$, η^{n+2}_i, $\varkappa$. В случае обращения в нуль инварианта $\varkappa$ эта $(f\xi\eta\rho)$ -структура вырождается в почти контактную структуру. В работе [2] исследовался вопрос о почти контактном погружении и были найдены достаточные условия (см. [2], (11)), при выполнении которых на M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ индуцируется почти контактная структура со структурными объектами f^i_j, $\bar{\xi}^i_{n+2} = \rho \xi^i_{n+2}$, $\bar{\eta}^{n+2}_i = q \eta^{n+2}_i$ (ρ, q - абсолютные инварианты). При этом оказывается, что объекты $\{\gamma^\alpha\}$ и $\{\gamma_\alpha\}$ должны быть охваченными объектами и их компоненты должны соответственно определяться равенствами $\gamma^\alpha = \frac{1}{\varkappa_1} \rho^\alpha_\gamma \rho^\gamma_{n+2}$, $\gamma_\alpha = \frac{1}{\varkappa_1} \rho^\gamma_\alpha \rho^{n+2}_\gamma$, где $\varkappa_1 = 1 + \rho^\alpha_{n+2} \rho^{n+2}_\alpha$. Равенство нулю абсолютного инварианта $\varkappa$ равносильно обращению в нуль инварианта $\rho^\beta_\alpha \rho^{n+2}_\beta \rho^\alpha_{n+2}$ (см. [2]).

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ АН СССР. М., 1966. Т. 1. С. 139-190.

2. О п о л ь с к а я Е.В. О почти контактном погружении в многообразие почти контактной структуры//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып. 13. С. 76-80.

3. О с т и а н у Н.М., П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами// Проблемы геометрии/ВИНИТИ АН СССР. М., 1980. Т. 11. С. 3-64.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И. П о п о в

(Калининградский университет)

Работа посвящена построению общей теории регулярных трехсоставных распределений [13], [14], которые мы назвали $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределениями. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределение - это тройка распределений проективного пространства P_n, состоящая из базисного распределения r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение), m-мерных плоскостей M (M-распределение), гиперплоскостей H (H-распределение) с соотношением инцидентности $\Lambda \subset M \subset H$ их соответствующих элементов в каждом центре X. Рассматриваются фокальные многообразия и инвариантные подпространства $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Изучаются проективные связности, индуцированные построенными инвариантными подпространствами данного распределения. Исследование проводится методом Г.Ф. Лаптева [3], [16]. При внешнем дифференцировании применяется оператор ∇, введенный в работе [4]. Схема использования индексов такова: $\bar{J}, \bar{K}, \bar{L}, \ldots = \overline{0,n}$; $J, K, L, \ldots = \overline{1,n}$; $p, q, r, s, t = \overline{1,r}$; $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,r}$; $i, j, k, \ldots = \overline{r+1,m}$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = \overline{m+1,n-1}$; $\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\tau} = \overline{0,n-1}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = \overline{0,m}$; $a, b, c, d = \overline{1,m}$; $u, v, w = \overline{r+1,n-1}$; $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \{\overline{r+1,m}; n\}$; $\rho, \sigma, \tau = \overline{1,n-1}$; $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} = \{\overline{1,m}; n\}$; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1,n}$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1,n}$.

§1. Задание трехсоставного распределения проективного пространства

1. Дифференциальные уравнения трехсоставного распределения в репере $\mathcal{R}^0$.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $\mathcal{R} = \{A_{\bar{J}}\}$, дифференциальные уравнения