ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

А.В. А б р а м о в

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ∇ -СОПРЯЖЕННЫХ СЕТЕЙ

Пусть $\Sigma_p=(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$ -сеть в некоторой области гладкой поверхности вещественного евклидова пространства E_n. К поверхности V_p присоединяем подвижной полуортогональный репер $\mathcal{R}=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$,где $x\in V_p$, $\vec{e}_i$ -единичные векторы,касательные к линиям сети, $\vec{e}_\alpha$ - попарно ортогональные единичные векторы нормали $N_{n-p}(x)$, $i,j,k=1,\dots,p$; $\alpha,\beta=p+1,\dots,n$. Выпишем деривационные формулы поверхности:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta; \qquad (\mathrm{I})$$

где $\vec{x}$ -радиус-вектор точки x .При этом

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha; \qquad (2)$$

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k \quad (i\neq j); \qquad (3)$$

$$dg_{ij}=g_{ik}\omega_j^k+g_{jk}\omega_i^k,\quad \omega_\alpha^k+g^{ki}\omega_i^\alpha=0,\quad \omega_\beta^\alpha+\omega_\alpha^\beta=0; \qquad (4)$$

где b_{ij}^α -компоненты вторых основных тензоров поверхности; g_{ij} -метрический тензор; $\{a_{jk}^i\}$ -объект сети Σ_p .

Для того,чтобы сеть Σ_p была ∇-сопряженной [1], необходимо и достаточно,чтобы компоненты объекта сети в репере $\mathcal{R}$ удовлетворяли условию

$$a_{jk}^i=0 \quad (i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i). \qquad (5)$$

Векторы $\vec{b}_{ij}=b_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha$ вместе с точкой x определяют главную нормаль $N_q(x)\subset N_{n-p}(x)$,где q -ранг системы векторов $\vec{b}_{ij}$.Плоскость $P_{ij}=[x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha,a_{ij}^k\vec{e}_k+\vec{b}_{ij}$ (i,j,k - различны,по k суммируется) является плоскостью смещения прямой $[x,\vec{e}_i]$ вдоль направления семейства σ_j .Условие (5) эквивалентно следующему геометрическому критерию [1]:

для того, чтобы сеть Σ_p в области U поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n была ∇-сопряженной, необходимо и достаточно, чтобы плоскости P_{ij} пересекали главную нормаль $N_q(x)$ по прямой или совпадали с соответствующими плоскостями $[x, \vec{e}_i, \vec{e}_j]$ $(i \neq j)$.

В настоящей заметке рассматриваются ∇-сопряженные сети на трехмерной поверхности V_3 в пятимерном вещественном евклидовом пространстве E_5, когда прямые $\ell_{ij}=[x,\vec{b}_{ij}]$ специальным образом расположены. В дальнейшем индексы принимают значения: $i,j,k=1,2,3$; $\alpha,\beta=4,5$.

I. Прямые $\ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{23}$ совпадают. Положим:

$$\vec{b}_{13}=\varphi \vec{b}_{12}, \quad \vec{b}_{23}=\psi \vec{b}_{12}. \qquad (6)$$

Дифференцирование равенств (2) – (6) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\Delta b^\alpha_{11}\wedge\omega^1+\Delta b^\alpha_{12}\wedge\omega^2+(\Delta\varphi\cdot b^\alpha_{12}+\varphi\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^3=0,\\
&\Delta b^\alpha_{21}\wedge\omega^1+\Delta b^\alpha_{22}\wedge\omega^2+(\Delta\psi\cdot b^\alpha_{12}+\psi\Delta b^\alpha_{21})\wedge\omega^3=0,\\
&(\Delta\varphi\cdot b^\alpha_{12}+\varphi\cdot\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^1+(\Delta\psi\cdot b^\alpha_{12}+\psi\Delta b^\alpha_{12})\wedge\omega^2+\Delta b^\alpha_{33}\wedge\omega^3=0.
\end{aligned} \qquad (7)$$

где

$$\Delta b^\alpha_{11}=\nabla b^\alpha_{11}+(b^\alpha_{11}a^1_{21}+b^\alpha_{22}a^2_{11})\omega^2+(b^\alpha_{11}a^1_{31}+b^\alpha_{33}a^3_{11})\omega^3, \qquad (8)$$

$$\Delta b^\alpha_{22}=\nabla b^\alpha_{22}+(b^\alpha_{11}a^1_{21}+b^\alpha_{22}a^2_{11})\omega^1+(b^\alpha_{22}a^2_{32}+b^\alpha_{33}a^3_{22})\omega^3, \qquad (9)$$

$$\Delta b^\alpha_{33}=\nabla b^\alpha_{33}+(b^\alpha_{33}a^3_{13}+b^\alpha_{11}a^1_{33})\omega^1+(b^\alpha_{33}a^3_{23}+b^\alpha_{22}a^2_{33})\omega^3, \qquad (10)$$

$$\Delta b^\alpha_{12}=\nabla b^\alpha_{12},$$

$$\Delta\varphi=d\varphi+\varphi(\omega^2_2+\omega^1_1-\omega^3_3)+\varphi^2\omega^3_2+\varphi\cdot\psi\omega^3_1-\psi\omega^2_1-\omega^2_3,$$

$$\Delta\psi=d\psi+\psi(\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)+\psi^2\omega^3_1+\varphi\cdot\psi\omega^3_2-\varphi\omega^1_2-\omega^1_3.$$

Здесь ∇b^α_{ij} – ковариантная производная тензора b^α_{ij}.

$$\Delta a^i_{ji}\wedge\omega^i+\Delta a^i_{jj}\wedge\omega^j, \qquad (12)$$

где

$$\Delta a^i_{ji}=da^i_{ji}-a^i_{ji}\omega^j_j-a^i_{ki}\omega^k_i-a^i_{jj}\omega^i_i+b^\alpha_{ij}\omega^i_\alpha+\sum_\alpha g^{iu}b^\alpha_{jk}b^\alpha_{ui}\omega^k+a^i_{ji}a^i_{ki}\omega^k,$$

$$\Delta a^i_{jj}=da^i_{jj}+a^i_{jj}(\omega^i_i-2\omega^j_j)-a^i_{ji}\omega^i_j+b^\alpha_{jj}\omega^i_\alpha+\sum_\alpha g^{iu}b^\alpha_{jk}b^\alpha_{uj}\omega^k+(a^k_{jj}a^i_{kk}-a^i_{jj}a^j_{kj})\omega^k.$$

В принятых обозначениях для системы (2)-(11) $q=22$, $S_1=12$, $S_2=10$, $N=Q=32$. Справедлива

Т е о р е м а. Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с совпадающими прямыми ℓ_{12}, ℓ_{13} и ℓ_{23}, существует и определяется с произволом десять функций двух аргументов.

Для сравнения заметим, что поверхность $V_3\subset E_5$, несущая произвольную ∇-сопряженную сеть, существует с произволом двух функций трех аргументов.

На поверхности $V_3\subset E_5$ существует поле особой нормали [2] тогда и только тогда, когда метрический тензор поверхности является линейной комбинацией вторых тензоров:

$$g_{ij}=h_\alpha b^\alpha_{ij}. \qquad (13)$$

Если полем особой нормали служит прямая ℓ_{12}, то

$$g_{23}=\psi g_{12}, \quad g_{13}=\varphi g_{12}, \quad \vec{b}^{\,2}_{12}=g_{12}\vec{b}_{ii}\vec{b}_{12}. \qquad (16)$$

Последнее равенство – необходимое и достаточное условие того, что прямая ℓ_{12} – особая нормаль. Если сеть не имеет сопряженных направлений, то она не может быть полуортогональной. Особая нормаль не может быть ортогональной ни одному вектору нормальной кривизны линий сети. Точки с радиус-векторами $\vec{z}_i=\vec{x}+\vec{b}_{ii}$ лежат на одной прямой, ортогональной прямой ℓ_{12}.

Произвол существования поверхности $V_3\subset E_5$, несущей ∇-сопряженную сеть, когда две из прямых ℓ_{ij} совпадают, а третья вырождается в точку, – девять функций двух аргументов.

2. Прямые ℓ_{13}, ℓ_{23} вырождаются в точку:

$$\vec{b}_{13}=\vec{0}, \quad \vec{b}_{23}=\vec{0} \quad (\vec{b}_{12}\neq\vec{0}). \qquad (17)$$

Система уравнений (2) принимает вид:

$$\omega^\alpha_1=b^\alpha_{11}\omega^1+b^\alpha_{12}\omega^2, \quad \omega^\alpha_2=b^\alpha_{21}\omega^1+b^\alpha_{22}\omega^2, \quad \omega^\alpha_3=b^\alpha_{33}\omega^3 \qquad (18)$$

Дифференцирование системы (18) приводит к уравнениям:

$$\Delta b_{11}^{\alpha}\wedge\omega^1+\Delta b_{12}^{\alpha}\wedge\omega^2-b_{12}^{\alpha}a_{32}^{2}\,\omega^2\wedge\omega^3=0,$$

$$\Delta b_{21}^{\alpha}\wedge\omega^1+\Delta b_{22}^{\alpha}\wedge\omega^2-b_{12}^{\alpha}a_{31}^{1}\,\omega^1\wedge\omega^3=0,$$

$$-b_{21}^{\alpha}a_{32}^{2}\,\omega^2\wedge\omega^1-b_{12}^{\alpha}a_{31}^{1}\,\omega^1\wedge\omega^2+\Delta b_{33}^{\alpha}\wedge\omega^3=0,$$

где формы Δb_{ii}^{α} и Δb_{12}^{α} имеют такое же строение, как и аналогичные формы (8) - (11). Так как $\vec{b}_{12}\neq\vec{0}$, то

$$a_{32}^{2}=a_{31}^{1}. \qquad (19)$$

То есть псевдофокусы прямой $[x,\vec{e}_3]$ совпадают. Присоединяем равенства (19) к исходной системе, получаем систему уравнений в инволюции. Для нее $q=19$, $S_1=12$, $S_2=7$, $N=Q=26$. Следовательно, поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя вырожденными в точку прямыми ℓ_{23} и ℓ_{13}, существует и определяется с произволом семь функций двух аргументов. Если к тому же на прямой $[x,\vec{e}_3]$ псевдофокусов не существует, то произвол существования поверхности V_3 -шесть функций двух аргументов.

Так как ∇-сопряженная сеть является голономной, то вдоль каждого семейства линий сети Σ_3 поверхность V_3 расслаивается на двумерные поверхности. Для последнего случая из деривационных формул (1) следует: $d\vec{e}_3=\omega_3^3\vec{e}_3$, если только $\omega^3=0$. Поэтому направление семейства σ_3 образует постоянное поле направлений вдоль каждой двумерной поверхности V_2, на которые расслаивается поверхность V_3, вдоль семейства σ_3. Если поверхность V_3 несет голономную сеть Σ_3, такую, что на каждой поверхности V_2, на которые расслаивается поверхность V_3 вдоль семейства σ_3, образует постоянное поле направлений, то это направление сопряжено семействам σ_1 и σ_2 и параллельно переносится вдоль них.

Пусть сеть Σ_3 - ∇-сопряженная, имеет две пары сопряженных направлений ($\vec{b}_{13}=\vec{0}$, $\vec{b}_{23}=\vec{0}$) и семейство σ_3 -асимптотическое, то есть

$$\vec{b}_{33}=\vec{0}. \qquad (20)$$

Система уравнений (18) принимает более простой вид:

$$\omega_1^{\alpha}=b_{11}^{\alpha}\omega^1+b_{12}^{\alpha}\omega^2;\ \omega_2^{\alpha}=b_{21}^{\alpha}\omega^1+b_{22}^{\alpha}\omega^2;\ \omega_3^{\alpha}=0.$$

Дифференцироваиие последней системы уравнений приводит к равенству (19) и конечным соотношениям:

$$\vec{b}_{11}a_{33}^{1}+\vec{b}_{12}a_{33}^{2}=\vec{0};\ \vec{b}_{12}a_{33}^{1}+\vec{b}_{22}a_{33}^{2}=\vec{0}. \qquad (21)$$

Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя парами сопряженных направлений и общим для этих пар асимптотическим и геодезическим полем направлений, существует и определяется с произволом шесть функций двух аргументов.

Если главная нормаль двумерна, то семейство σ_3 прямолинейное. Если семейство σ_3 не прямолинейное, то главная нормаль одномерна. Единственная асимптотическая форма имеет вид:

$$\Phi=-b_{12}^{4}\,(a_{33}^{2}\omega^1+a_{33}^{1}\omega^2)^2.$$

Отсюда по теореме Сегре следует:

Т е о р е м а. Поверхность $V_3\subset E_5$, несущая ∇-сопряженную сеть с двумя парами полей сопряженных направлений и общим для этих пар полем асимптотических направлений (но не геодезических), является развертывающейся поверхностью.

Если семейство σ_3 состоит из прямых и главная нормаль одномерна, то в общем случае поверхность V_3 -поверхность класса 1. Она будет развертывающейся поверхностью только тогда, когда

$$|\vec{b}_{12}|=\sqrt{|\vec{b}_{11}|\cdot|\vec{b}_{22}|}.$$

Перейдем к рассмотрению ∇-сети фосса с двумя парами полей сопряженных направлений. ∇-сетью фосса [1] называется ∇-сопряженная геодезическая сеть. К условию (5) добавляются равенства:

$$a_{jj}^{i}=0 \qquad (i\neq j) \qquad (22)$$

Из системы (3), (5), (22) следует:

$$\vec{b}_{jj}(g^{ii}\vec{b}_{ik}+g^{ik}\vec{b}_{kk})-\vec{b}_{jk}(g^{ii}\vec{b}_{ij}+g^{ik}\vec{b}_{ik})=0. \qquad (23)$$

Из (23) и (17') вытекает:

$$\vec{b}_{12}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{11}\cdot\vec{b}_{33}=0.$$

Поэтому прямые ℓ_{ij} занимают положения:

$$\ell_{12}=\ell_{11}=\ell_{22}\perp\ell_{33}.$$

Присоединенная кривая [2] поверхности имеет уравнение:

$$\det\|\sum_{\alpha}(b^{\alpha}_{ij}y^{\alpha}-g_{ij})\|=0. \qquad (24)$$

Если поверхность V_3 несет ∇-сеть Фосса с двумя парами полей сопряженных направлений и поле особой нормали, то уравнение (24) имеет вид:

$$(b^5_{33}y^5-1)(b^4_{12}y^4-g_{12})^2=0.$$

Следовательно, присоединенная кривая распадается на пару совпадающих и прямую им ортогональную. При этом особая нормаль проходит через точку их пересечения.

3. $\ell_{12}\perp\ell_{13}$, ℓ_{23} вырождается в точку. Поверхность V_3, удовлетворяющая этим условиям, существует и определяется с произволом девять функций двух аргументов. Если Σ_3 – ∇-сеть Фосса, то из равенств (23) следует:

$$\vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{13}=0,\ \vec{b}_{33}\cdot\vec{b}_{12}=0,$$

то есть прямые ℓ_{ij} занимают положения:

$$\ell_{12}=\ell_{22}\perp\ell_{13}=\ell_{33}.$$

Уравнения (24) в нашем случае есть уравнения вида:

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}=0.$$

Дополняя пространство E_5 несобственными точками, можно сказать, что присоединенная кривая распадается на кривую второго порядка и бесконечно удаленную прямую.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности.–Изв.высш.уч.зав."Математика", 1974, № 5, с, 24–30.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи на P– поверхности евклидова пространства.– "Сиб.мат.журнал", 1966, (УП), №3, 499–511.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И МНОГООБРАЗИЕМ $R_H(Q)$ ГИПЕР - КВАДРИК АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА.

Изучается локальное биективное отображение φ точечного $(n+1)$-мерного проективного пространства P_{n+1} в специальное многообразие $R_H(Q)$ эллипсоидов n-мерного аффинного пространства A_n. Во 2-й дифференциальной окрестности построены и геометрически охарактеризованы инвариантные алгебраические многообразия, с помощью которых определяются характеристические прямые отображения φ и индуцируемых им отображений. Получена связь касательных к этим отображениям дробнолинейных отображений с соответствующими типами характеристических направлений.

§I. Многообразие $R_H(Q)$

Пусть Q $(n-1)$-мерный эллипсоид n-мерного аффинного пространства A_n с его фундаментальной группой G, а H-подгруппа группы G, состоящая из прямых гомотетий и параллельных переносов. Обозначим $R_H(Q)$ орбиту действия группы H на пространстве $R(Q)$ эллипсоидов.