

С. В. Орлов

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТРАВМЫ ПОЗВОНОЧНИКА**

Изучению повреждений позвоночника посвящено большое количество научных трудов фундаментальной и прикладной науки. Особую роль в исследовании этой патологии играют методы математического моделирования, так как позволяют прогнозировать развитие неблагоприятных деформаций позвоночника и оптимизировать методы устранения этих повреждений. С использованием математической модели трехпозвонкового комплекса разработан алгоритм хирургического лечения некоторых типичных повреждений позвоночника.



A plenty of proceedings of various disciplines fundamental and applied science is devoted to studying of vertebral damage. The special role in studying this pathology is played with methods of mathematical modelling since allow to predict development of adverse deformations of a backbone and to optimize methods of elimination of these damages. Using mathematical model three-vertebra a complex the algorithm of surgical treatment of typical spinal damages is developed.

Ключевые слова: математическое моделирование, переломы позвоночника, численные методы, биомеханика.

Key words: mathematical modelling, fractures of spinal column, numerical methods, biomechanics.

В основу разработанной математической модели стабильности трехпозвонокового комплекса положено математическое описание динамических процессов дифференциальными уравнениями Лагранжа 2-го рода. Это описание составлено на основе расчетной схемы комплекса из трех позвонков, представленных как дискретные сосредоточенные массы, связанные вязкоупругими элементами и обладающие определенными геометрическими параметрами. При этом механическая система является устойчивой и сбалансированной.

За основу был принят принцип стабильности позвоночного столба, изложенный Л. Рене (L. Rene) [2], где стабильность позвоночника представлена в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что обеспечивается телами позвонков с дугоотростчатými суставами, которые связаны между собой вязкоупругими демпфирующими элементами (межпозвоночные диски, мышечно-связочный аппарат). При этом механическая система является диссипативной, распределение нагрузок соответствует трехстолбовой концепции Ф. Денис (F. Denis) [3]; предел прочности тел позвонков и упругодемпфирующих элементов, а также их упругая деформация и плотность считались условно установленными по данным работы [4], а изменение геометрических характеристик тел позвонков соответствовало основным типам переломов позвонков [5; 6].

Расчетная схема фрагмента позвоночника человека, состоящая из трех позвонков с клиновидным средним позвонком и стабилизирующими конструкциями, представлена на рисунке 1.

На расчетной схеме (рис. 1) третий позвонок связывается посредством упругих элементов $Сор_1$ и $Сор_2$ с опорой по оси X , а первый — по оси Y через $С_y$. Для фиксации вариантов нестабильности позвоночника предусмотрено применение условных протезирующих конструкций с коэффициентами жесткости $Сст_1$ и $Сст_2$, что позволяет моделировать варианты фиксаторов позвонков.

Математическая модель позволяет на основе вычисления внутренних нагрузок опорных комплексов каждого позвонка трехпозвонокового комплекса рассчитывать варианты распределения нагрузок при типичных основных переломах позвонков по классификации по [6]. Кроме этого, возможен расчет смещения позвонков по оси Y под воздействием силы $Q2_y$, что чаще всего является причиной стеноза позвоночного канала и может приводить к сдавливанию дуального мешка. Выбранная динамическая модель трехпозвонокового комплекса человека



(рис. 1) является механической системой, для которой уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, 7, \quad (1)$$

где T, Π – кинетическая и потенциальная энергия системы; Φ – диссипативная функция, определяемая спинными мышцами и связками; Q_k – внешние воздействия.

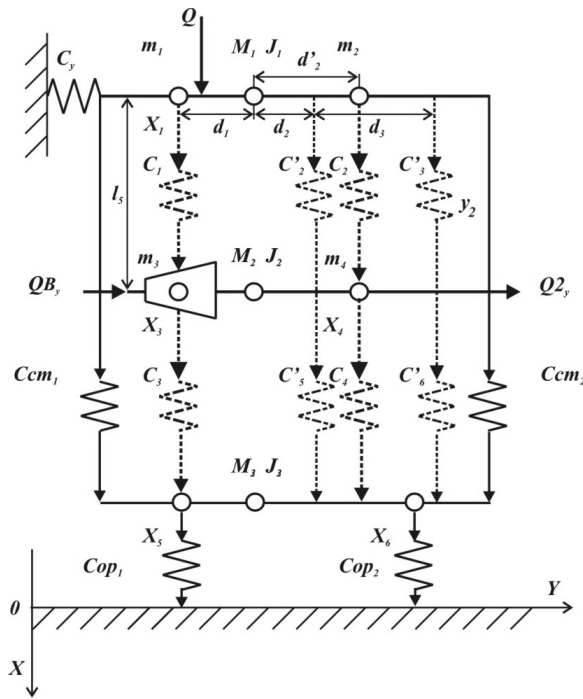


Рис. 1. Механическая схема трехпозвоночного комплекса с патологией среднего позвонка и ее двухсторонней стабилизацией

Координаты $X_{ц}$ и $Y_{ц}$ центра тяжести и момента инерции J плоского позвонка определяются формулами:

$$X_{ц} = \frac{\sum_{i=1}^4 X_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^4 Y_i}; \quad Y_{ц} = \frac{\sum_{i=1}^4 X_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^4 X_i}; \quad J = 2 \cdot g \cdot \int_0^X \int_0^Y (X^2 + Y^2) \cdot dX \cdot dY, \quad (2)$$

где индекс i определяет число элементарных фигур, составляющих плоский позвоночник; g – удельная поверхностная масса позвонка, кг/мм².

В качестве обобщенных координат принимаются следующие.

1. Смещения по оси Ox :

x_1 – смещение части переднего опорного комплекса первого позвонка;

x_2 – смещение части заднего опорного комплекса первого позвонка;

x_3 – смещение части переднего опорного комплекса второго позвонка;

x_4 – смещение части заднего опорного комплекса второго позвонка;



x_5 — смещение части переднего опорного комплекса третьего позвонка;
 x_6 — смещение части заднего опорного комплекса третьего позвонка.

2. Смещения по оси Oy :

y_1 — смещение части переднего опорного комплекса первого позвонка;

y_2 — смещение части заднего опорного комплекса первого позвонка;

y_3 — смещение части переднего опорного комплекса второго позвонка;

y_4 — смещение части заднего опорного комплекса второго позвонка;

y_5 — смещение части переднего опорного комплекса третьего позвонка;

y_6 — смещение части заднего опорного комплекса третьего позвонка.

Для упрощения модели смежные смещения по оси Oy приняли:

$y_1 = y_2$ — смещение первого позвонка;

$y_3 = y_4$ — смещение второго позвонка;

$y_5 = y_6$ — смещение третьего позвонка.

Кроме того, смещения по оси Oy первого и третьего позвонков пренебрежительно малы ввиду приложения упругих опор: $y_1 = 0, y_3 = 0$.

При малых смещениях (бесконечно малых x) в силу эквивалентности $\sin(x)$ и x получаем выражения для углов наклона тел системы:

$$a_1 = \frac{x_2 - x_1}{D}; \quad a_2 = \frac{x_4 - x_3}{D}; \quad a_3 = \frac{x_6 - x_5}{D}. \quad (3)$$

В работе представлена система линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\mathbf{M} \cdot \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + \mathbf{B} \cdot \frac{d \mathbf{X}}{dt} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Q}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 c_1 & m_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{10} c_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 c_3 & m_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{20} c_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & m_{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{30} & m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 + M_2 + M_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 c_1 & 0 & -B_1 c_3 & 0 & B c m_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & -B_2 & 0 & 0 & 0 \\ -B_1 c_1 & 0 & (B_1 + B_3) c_2 + B c m_1 & 0 & -B c m_1 - C_3 & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & 0 & B_2 + B c m_2 + B_4 & 0 & -(B c m_2 + B_4) & 0 \\ 0 & 0 & -B c m_1 - B_3 & 0 & B o p_1 + B c m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B c m_2 - B_4 & 0 & B o p_2 + B c m_2 & 0 \\ S B_1 & 0 & S B_3 & 0 & 0 & 0 & B_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 c_1 + C c m_1 & 0 & -C_1 c_3 & 0 & C c m_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 + C c m_2 & 0 & -C_2 & 0 & -C c m_2 & 0 \\ -C_1 c_1 & 0 & (C_1 + C_3) c_3 & 0 & -C_3 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & C_2 + C_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ -C c m_1 & 0 & -C_3 & 0 & C o p_1 + C c t_1 + C_3 & 0 & 0 \\ 0 & -C c m_2 & 0 & C_4 & 0 & C_4 + C o p_2 + C c t_2 & 0 \\ -S_1 & 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 & C_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Q_y]^T, \quad \mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6 \quad y]^T.$$



Умножая обе части векторного уравнения (3) на обратную матрицу M^{-1} , получим следующее приведенное уравнение:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + M^{-1} \cdot B \cdot \frac{dX}{dt} + M^{-1} \cdot C \cdot X = M^{-1} \cdot Q,$$

или

$$\frac{d^2X}{dt^2} + W \cdot \frac{dX}{dt} + A \cdot X = F, \quad (5)$$

где $A = M^{-1}C$, $W = M^{-1}B$, $F = M^{-1}Q$.

Для получения эпюр нагрузок P_1, P_2 и P_3, P_4 , а также упругих деформаций x_1, x_2 и x_3, x_4 вдоль оси Y для 1-го и 2-го позвонков использовалась линейная интерполяция и экстраполяция в соответствии со следующими формулами (для 1-го позвонка при его длине 80 мм):

$$P_1(y) = k_1 \cdot y + b_1, \quad x_1(y) = K_1 \cdot y + V_1, \quad y \in [0, 80], \quad (6)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{P_2 - P_1}{y_2 - y_1}; \quad b_1 = \frac{P_1 \cdot y_2 - P_2 \cdot y_1}{y_2 - y_1}; \quad K_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}; \quad V_1 = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{y_2 - y_1}.$$

Эпюры нагрузок P_3, P_4 и упругих деформаций x_3, x_4 для 2-го позвонка рассчитываются по формулам, аналогичным формулам (6).

1. Приведем результаты численных расчетов грудного и поясничного отделов позвоночника без его повреждения (норма) ($d_2 = 0$).

Задавались следующие исходные данные (рис. 1): $C_1 = 3,26 \cdot 10^3$ н/мм, $C_2 = 0,92 \cdot 10^3$ н/мм, $C_3 = 0,46 \cdot 10^3$ н/мм, $C_4 = 3,26 \cdot 10^3$ н/мм, $C_5 = 0,92 \cdot 10^3$ н/мм, $C_6 = 0,46 \cdot 10^3$ н/мм, $C_y = 5 \cdot 10^3$ н/мм, $Cor_1 = Cor_2 = 3,26 \cdot 10^3$ н/мм, $Q = 400$ кг (внешняя сила приложена к центру тяжести позвонка при $y = 21$ мм), $\beta_1 = 0^0, \beta_3 = 0^0$ (деформация позвонка отсутствует), $Csm1 = Csm2 = 0$ (стабилизирующие пластины слева и справа от позвонков отсутствуют – рис. 1), число временных слоев $j = 1000$, а шаг интегрирования по времени $\tau = 10^{-2}$ с.

Для уточнения распределения нагрузок P , действующих на центральный и правый столбы позвонков, рассмотрим рассчитанные временные зависимости нагрузок (без перенесения второго элемента жесткости C_2 в центр тяжести позвонка, при $d_2 = 26,5$ мм), приведенные на рисунке 2.

Вычисляя отношения P_2, P_4, P_6 к P_1, P_3, P_5 соответственно, определяем, что нагрузки P , действующие на первый и третий столбы позвонков в норме, соотносятся как 0,7 к 0,3, что соответствует реальной картины распределения нагрузок P вдоль позвонков человека в грудном отделе.

2. Проведем моделирование повреждений типа А по классификации АО (разрушение первого столба) позвонка и варианты стабилизации. Для моделирования этого повреждения перенесем второй элемент жесткости C_2 в центр тяжести позвонка ($d_2 = 0$), а также условно разрушим первый столб второго позвонка ($C_1 = C_3 = 0$). Результаты расчетов нагрузок P для 1-го, 2-го и 3-го позвонков представлены на рисунке 3.

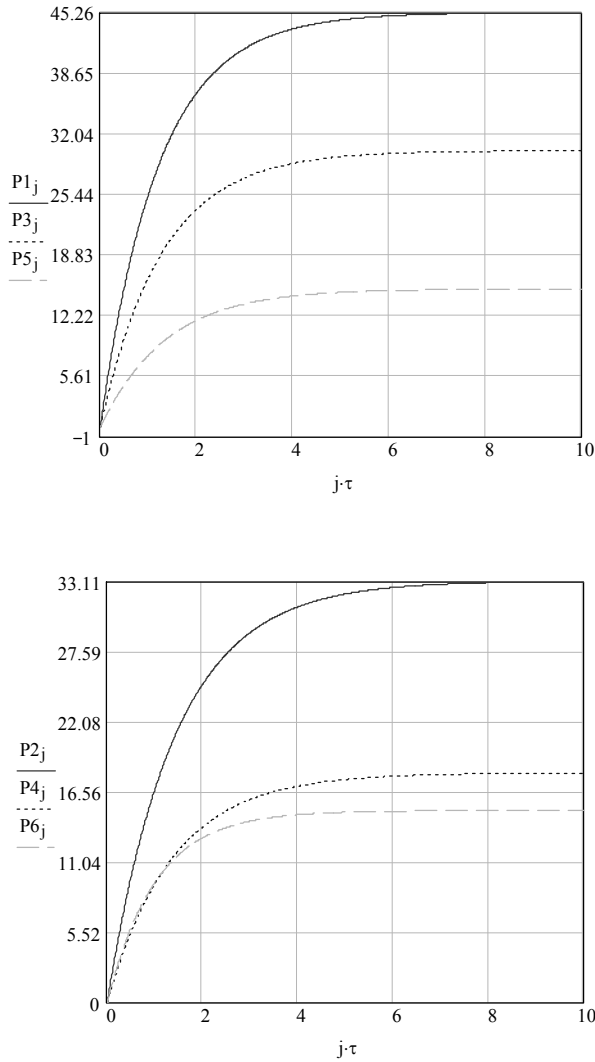


Рис. 2. Рассчитанные временные зависимости нагрузок P_1 , P_3 , P_5 , действующих на центральные столбы 1-го, 2-го и 3-го позвонков, и P_2 , P_4 и P_6 — на правые столбы, в $\text{кг}/\text{см}^2$, время в с

Как следует из рисунка 3, нагрузку первые столбы 1-го и 2-го позвонков вообще не воспринимают, а загружаются правый и средней столбы позвоночника. Оптимальным вариантом лечения данного состояния является протезирование передней колонны металлической пластиной ($Cst_1 = 104 \text{ н}/\text{мм}$, см. рис. 1), соединяющей 1-й и 3-й позвонки (рис. 4).

Протезирование передней колонны дополним фиксацией задней. Распределение нагрузки на позвонки P изображено на рисунке 5.

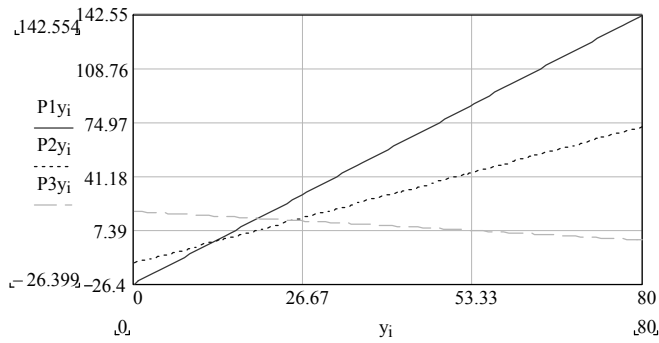


Рис. 3. Распределения нагрузок P вдоль оси y , приложенных к 1-му, 2-му и 3-му позвонкам при $Q = 400$ кг и $y = 21$ мм, в кг/см²

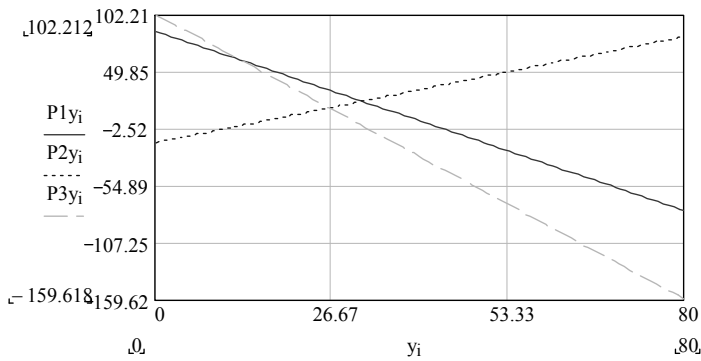


Рис. 4. Распределения нагрузок P вдоль оси y , приложенных к 1-му, 2-му и 3-му позвонкам при $Q = 400$ кг и $y = 21$ мм, в кг/см², и стабилизирующей пластины при $Cst_1 = 104$ н/мм

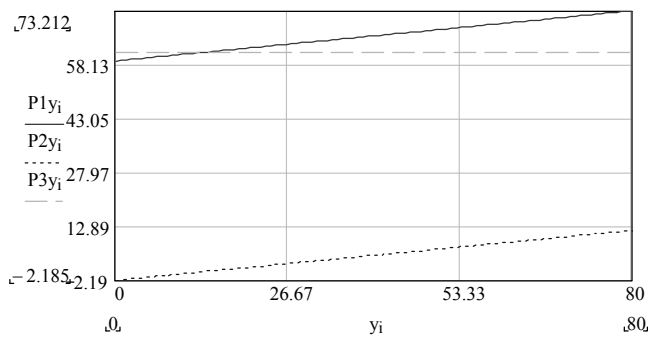


Рис. 5. Распределения нагрузок P вдоль оси y , приложенных к 1-му, 2-му и 3-му позвонкам при $Q = 400$ кг и $y = 21$ мм, в кг/см², и стабилизирующих пластин при $Cst_1 = 104$ н/мм и $Cst_2 = 104$ н/мм



При уменьшении жесткости пластин начинает нагружаться первый столб позвонка при некоторой разгрузке левого столба позвонка. Таким образом, для сохранения распределения нагрузок, близких к физиологическим, на позвоночные столбы необходимо — при данных типах повреждения — оптимально подбирать физические параметры материала фиксаторов (жесткость, упругость и т. д.).

3. Моделирование повреждений типа В (разгибательные переломы) по классификации АО позвонка и варианты коррекции.

Моделирование данной ситуации достигалось условным разрушением 3-го столба, тогда $C_3 = 0$ и $C_6 = 0$ (рис. 6). Для устранения повреждений разгибательного типа применяют заднюю стабилизацию типа транспедикулярной фиксации (ТПФ). На рисунке 7 приведено распределение нагрузок P при повреждении типа В после ТПФ.

54

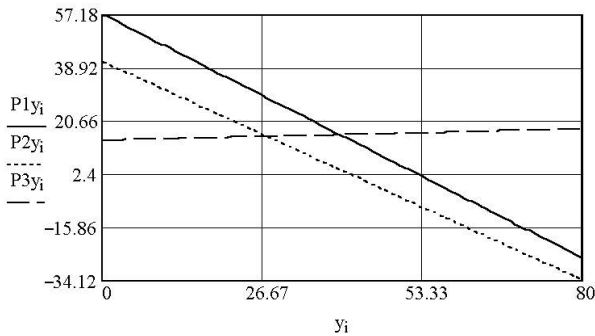


Рис. 6. Распределения нагрузок P , приложенных к 1-му, 2-му и 3-му позвонкам при $Q = 400$ кг и $y = 21$ мм при переломе типа В

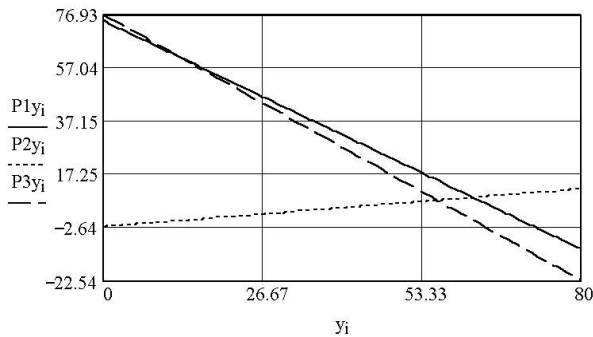


Рис. 7. Распределение нагрузок P при повреждении типа В после стабилизации перелома транспедикулярной системой (ТПФ)

Отметим, что приведенные выше варианты коррекции биомеханических нарушений при переломах позвоночника сгибательного и разгибательного механизмов при применении известных методов стабилизации (передней, задней, циркулярной) значительно улучшают прочностные характеристики системы, но существенно отличаются от распределения нагрузок в физиологически нормальном позвоночнике.



Итак, математическое моделирование типичных повреждений позвоночника на примере трехпозвонкового комплекса человека позволяет переосмыслить методы их хирургического лечения и требует продолжения научного поиска оптимальных стабилизирующих систем.

Список литературы

1. Громов А. П. Биомеханика травмы. М., 1979. С. 179 – 210.
2. *Reno Louis*. Surgery of the Spine. Berlin; Heidelberg, 1983. P. 55 – 58.
3. *Denis F*. Spinal instability as defined by the three column spine concept in acute spinal trauma // Clin. Orthop. 1984. N 189. P. 65.
4. *Liebschner M*. Finite element modeling of the human thoracolumbar spine // J. spine. 2003. Vol. 28, №6. P. 559 – 565.
5. *Fergusson R., Tencer A., Woodard P., Allen A*. Biomechanical comparison of spinal fracture models and the stabilizing effects of posterior instrumentations // Spine. 1988. № 13. P. 453.
6. *Magerl F*. A new classification of spinal fractures // Orthop trans. 1989. V. 15. P. 728.
7. *Hafer T. R., Felmly W. T., O'Brien M*. Thoracic and lumbar fractures: diagnosis and management // Spinal Surgery. 1991. Vol. 2. P. 857 – 910.

Об авторе

Сергей Владимирович Орлов – Институт биомеханики позвоночника, Калининград, e-mail: ser-orlov@yandex.ru.

Author

Sergey Orlov – Institute of Spinal Biomechanics, Kaliningrad, e-mail: ser-orlov@yandex.ru.