4. *Степанова Л.В., Банару М.Б.* О квазисасакиевых и косимплектических гиперповерхностях специальных эрмитовых многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. №32. С. 87 – 93.

5. *Банару М.Б.* Тензоры Кириченко // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск, 2000. Вып.2. С. 42–48.

6. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois Journal Math. 1966. V10. №2. P. 353–366.

7. *Banaru M.* Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Изв. АН Республики Молдова. 2000. №3. С. 3–10.

8. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 1980. №8. С. 32 – 38.

G.Banaru, M. Banaru

THE *U*-COSYMPLECTIC HYPERSURFACES AXIOM AND SIX-DIMENSIONAL HERMITIAN SUBMANIFOLDS OF THE OCTAVE ALGEBRA

It is proved that if a six-dimensional Hermitian submanifold of Cayley algebra satisfies the *U*-cosymplectic hypersurfaces axiom, then it is a Kählerian manifold.

УДК 514.75

О.О. Белова

(Калининградский государственный университет)

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВЯЗНОСТИ 1-ГО ТИПА В РАССЛОЕНИИ НАД ГРАССМАНОВЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Дана геометрическая характеристика результатов, полученных в статьях [1; 2].

В проективном пространстве P_n, отнесенном к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ с деривационными формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A$$

и структурными уравнениями проективной группы GP(n):

$$D\omega^I=\omega^J\Lambda\omega_J^I,\quad D\omega_I=\omega_I^J\Lambda\omega_J\quad (I,J,K=\overline{1,n});$$
$$D\omega_J^I=\omega_J^K\Lambda\omega_K^I+\delta_J^I\omega_K\Lambda\omega^K+\omega_J\Lambda\omega^I,$$

рассмотрено многообразие Грассмана V=Gr(m,n) m-мерных плоскостей L_m. Осуществлена специализация подвижного репера $\{A,A_a,A_\alpha\}$: вершины A,A_a помещены на плоскость L_m. Над многообразием Грассмана V построено главное расслоение G(V), типовой слой которого – подгруппа стационарности G плоскости L_m. Расслоение G(V) содержит главное подрасслоение P(V) с типовым слоем

– проективной группой $P=GP(m)\subset G\subset GP(n)$, действующей на плоскости L_m. Групповая связность в главном расслоении $G(V)$ задается объектом связности

$$\Gamma=\{L^a_\alpha,\Gamma^{ab}_\alpha,L^a_{b\alpha},\Gamma^{ac}_{b\alpha},\Gamma_{a\alpha},\Pi^b_{a\alpha},\Gamma^a_{\alpha\beta},\Pi^{ab}_{\alpha\beta},L^\alpha_{\beta\gamma},\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},L_{\alpha\beta},G^a_{\alpha\beta}\},$$

который содержит простейший подобъект $\Gamma_1=\{L^a_\alpha,\Gamma^{ab}_\alpha,L^a_{b\alpha},\Gamma^{ac}_{b\alpha},\Gamma_{a\alpha},\Pi^b_{a\alpha}\}$ и простой подобъект $\Gamma_2=\{\Gamma_1, L^\alpha_{\beta\gamma},\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$.

Произведено оснащение Бортолотти многообразия Грассмана, состоящее в присоединении к каждой m-мерной плоскости L_m (n-m-1)-мерной плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m. Плоскость P_{n-m-1} определена совокупностью точек $B_\alpha=A_\alpha+\lambda^a_\alpha A_\alpha+\lambda_\alpha A$. Дадим геометрическую интерпретацию индуцированных связностей из работы [1].

Теорема 1. *Оснащающую плоскость P_{n-m-1} в групповой связности 1-го типа* $\overset{01}{\Gamma}$ *переносить параллельно нельзя.*

Доказательство. Имеем

$$dB_\alpha=(\theta-\lambda_\gamma\omega^\gamma)B_\alpha+\overset{o}{\tilde\omega}{}^\beta_\alpha B_\beta+\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha A_a+\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha A, \qquad (1)$$

где $\overset{o}{\tilde\omega}{}^\beta_\alpha=\omega^\beta_\alpha-\overset{o}{L}{}^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma-\overset{o}{\Gamma}{}^{\beta a}_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_a$; $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha$, $\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha$ – ковариантные дифференциалы относительно групповой связности $\overset{01}{\Gamma}$. Если $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha=0$, $\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha=0$, что возможно с учетом выражений ковариантных дифференциалов и теоремы 2 [2], то $dB_\alpha\equiv 0\ (\mathrm{mod}B_\alpha)$, т.е. плоскость P_{n-m-1} остается на месте.

Замечание. Аналогичное вырождение параллельного перенесения на поверхности рассматривалось в работе [3].

Теорема 2. *Простейший подобъект* $\overset{o}{\Gamma}_1=\{\overset{o}{L}{}^a_\alpha,\overset{o}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha,\overset{o}{L}{}^a_{b\alpha},\overset{o}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha},\overset{o}{\Gamma}_{a\alpha},\overset{o}{\Pi}{}^b_{a\alpha}\}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости L_m+dL_m, смежной с образующей плоскостью L_m, на исходную плоскость из центра – плоскости Бортолотти P_{n-m-1}:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1:\ L_m+dL_m\xrightarrow{P_{n-m-1}}L_m. \qquad (2)$$

Доказательство. Плоскость L_m задается совокупностью точек A,A_a, дифференциалы которых приводятся к виду:

$$dA=(\theta-\lambda_\alpha\omega^\alpha)A+(\omega^a-\lambda^a_\alpha\omega^\alpha)A_a+\omega^\alpha B_\alpha,$$
$$dA_a=\theta A_a+(\omega^b_a-\lambda^b_\alpha\omega^\alpha_a)A_b+(\omega_a-\lambda_\alpha\omega^\alpha_a)A+\omega^\alpha_a B_\alpha.$$

Учитывая выражения форм групповой связности и охват $\overset{0}{\Gamma}_1$, имеем

$$dA=(\theta-\lambda_\alpha\omega^\alpha)A+\overset{o}{\tilde\omega}{}^a A_a+\omega^\alpha B_\alpha,\quad dA_a=(\theta-\lambda_\alpha\omega^\alpha)A_a+\overset{o}{\tilde\omega}{}^b_a A_b+\overset{o}{\tilde\omega}_a A+\omega^\alpha_a B_\alpha.$$

Интересующая нас проекция определяется формами проективной связности $\overset{o}{\tilde\omega}{}^a$, $\overset{o}{\tilde\omega}{}^b_a$, $\overset{o}{\tilde\omega}_a$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1$.

Теорема 3. *Объект псевдосвязности* $\overset{o}{\Gamma}_3 = \{\overset{o}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-m-1} + dP_{n-m-1}$*, смежной с оснащающей плоскостью* P_{n-m-1}*, на исходную плоскость из центра – образующей плоскости* L_m*:*

$$\overset{o}{\Gamma}_3 : P_{n-m-1} + dP_{n-m-1} \xrightarrow{L_m} P_{n-m-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Дифференциалы (1) точек B_α, с помощью которых определяется смежная плоскость $P_{n-m-1} + dP_{n-m-1}$, приводятся к виду:

$$d\,B_\alpha=(\theta-\lambda_\gamma\omega^\gamma)\,B_\alpha+\overset{o}{\tilde{\omega}}{}^{\beta}_{\alpha}\,B_\beta+(\Delta\lambda^a_\alpha+\lambda_\alpha\omega^a+\omega^a_\alpha-\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\omega^\beta_b-\lambda^a_\beta\lambda_\alpha\omega^\beta)\,A_a+$$
$$+(\Delta\lambda_\alpha+\lambda^a_\alpha\omega_a+\omega_\alpha-\lambda_\beta\lambda^a_\alpha\omega^\beta_a-\lambda_\beta\lambda_\alpha\omega^\beta)\,A.$$

Интересующая нас проекция из центра – плоскости $L_m=[A,A_a]$ – определяется формами связности $\overset{o}{\tilde{\omega}}{}^{\beta}_{\alpha}$, которые выражаются с помощью объекта псевдосвязности $\overset{o}{\Gamma}_3$.

Следствие. Простой подобъект $\overset{o}{\Gamma}_2 = \{\overset{o}{\Gamma}_1, \overset{o}{\Gamma}_3\}$ характеризуется парой отображений (2; 3).

Преобразуем дифференциалы точек B_α, подставляя вместо дифференциалов компонент оснащающего квазитензора их выражения через ковариантные дифференциалы:

$$dB_\alpha=(...)^\beta_\alpha B_\beta+(\nabla\lambda^a_\alpha+l^a_{\alpha\beta}\omega^\beta+l^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b)A_a+(\nabla\lambda_\alpha+l_{\alpha\beta}\omega^\beta+m^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a)A,$$

где

$$\begin{aligned} l^a_{\alpha\beta} &= \Gamma^a_{\alpha\beta}+\lambda^b_\alpha L^a_{b\beta}-\lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta}+\lambda_\alpha L^a_\beta-\lambda^a_\beta\lambda_\alpha,\\ l^{ab}_{\alpha\beta} &= \Pi^{ab}_{\alpha\beta}+\lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta}-\lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}+\lambda_\alpha\Gamma^{ab}_\beta-\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha,\\ l_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta}+\lambda^a_\alpha\Gamma_{a\beta}-\lambda_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta}-\lambda_\alpha\lambda_\beta,\\ m^a_{\alpha\beta} &= G^a_{\alpha\beta}+\lambda^b_\alpha\Pi^a_{b\beta}-\lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}-\lambda_\beta\lambda^a_\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Дифференцируя величины (4), получим сравнения:

$$\Delta l^a_{\alpha\beta}+l^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b+l_{\alpha\beta}\omega^a\equiv 0,\quad \Delta l^{ab}_{\alpha\beta}+(\delta^a_c m^b_{\alpha\beta}+\delta^b_c l^a_{\alpha\beta})\omega^c\equiv 0,$$
$$\Delta l_{\alpha\beta}+(m^a_{\alpha\beta}+l^a_{\alpha\beta})\omega_a\equiv 0,\quad \Delta m^a_{\alpha\beta}+l^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b+l_{\alpha\beta}\omega^a\equiv 0,$$

т.е. объект $l=\{l^a_{\alpha\beta}, l^{ab}_{\alpha\beta}, l_{\alpha\beta}, m^a_{\alpha\beta}\}$ является тензором. По аналогии с работой [4] будем говорить, что групповая связность Γ принадлежит пучку 1-го типа, если тензор l равен нулю. В этом случае обозначим объект связности Γ через $\overset{1}{\Gamma}$ и получим следующие формулы для его компонент:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}=\lambda^a_\gamma L^\gamma_{\alpha\beta}-\lambda^b_\alpha L^a_{b\beta}-\lambda_\alpha L^a_\beta+\lambda^a_\beta\lambda_\alpha,\quad \overset{1}{\Pi}{}^{ab}_{\alpha\beta}=\lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta}-\lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta}-\lambda_\alpha\Gamma^{ab}_\beta-\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha,\\ &\overset{1}{L}_{\alpha\beta}=\lambda_\lambda L^\gamma_{\alpha\beta}-\lambda^a_\alpha\Gamma_{a\beta}+\lambda_\alpha\lambda_\beta,\quad \overset{1}{G}{}^a_{\alpha\beta}=\lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}-\lambda^b_\alpha\Pi^a_{b\beta}+\lambda_\beta\lambda^a_\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

т.е. групповая связность $\overset{1}{\Gamma}$ может быть сведена к подсвязности Γ_2.

Теорема 4. *Оснащение Бортолотти многообразия Грассмана V индуцирует пучок групповых связностей 1-го типа в расслоении G(V).*

Следствие. Оснащение Бортолотти многообразия Грассмана V индуцирует связность 1-го типа.

Доказательство. Для выделения в пучке групповых связностей 1-го типа единственной связности подставим в (5) выражения компонент объекта $\overset{o}{\Gamma}_2$ [1, 5] и получим формулы [1] для компонент объекта связности 1-го типа $\overset{01}{\Gamma}$.

Учитывая формулы (5) в выражениях ковариантных производных [2], получим ковариантные производные относительно пучка связностей 1-го типа $\overset{1}{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\nabla}_\beta \lambda^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha, \quad \overset{1}{\nabla}{}^b_\beta \lambda^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha, \\ &\overset{1}{\nabla}_\beta \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad \overset{1}{\nabla}{}^a_\beta \lambda_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta} - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 5. *Для того чтобы первый и второй [1, 2] охваты компонент объекта связности Г совпали, необходимо и достаточно обращение ковариантных производных (6) в нуль.*

Доказательство вытекает из [5] и соотношений (6).

Список литературы

1. *Белова О.О.* Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. № 31. С. 8 – 11.

2. *Белова О.О.* Ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора на грассмановом многообразии // Там же, 2001. №32. С.13 – 17.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

4. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа, индуцированный оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2000. С. 35 – 38.

5. *Белова О.О.* Связности трех типов в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Там же, 2001. С. 3 – 5.

O. Belova

INTERPRETATION FOR THE 1-ST TYPE CONNECTION
IN THE FIBRE BUNDLE OVER GRASSMANN`S MANIFOLD

Geometric characteristic for the analytic results, obtained in the two previous article of the author, is given.