Доказательство. В равенстве (17) введем обозначения $l_{IJ} = \Gamma_{IJ} - \lambda_K \Gamma^K_{IJ} - \lambda_I \lambda_J$. Действуя оператором Δ, получим, что объект $l = \{l_{IJ}\}$ является тензором: $\Delta l_{IJ} \equiv 0$. Обращение в нуль тензора l определяет принадлежность групповой связности Γ пучку 1-го типа, объект которого обозначим $\overset{1}{\Gamma}$, тогда $\overset{01}{\Gamma} \in \overset{1}{\Gamma}$.

Список литературы

1. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. № 3. С. 81 – 89.
2. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.; Л., 1950.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000. 112 с.
4. *Белова О.О.* Связности трех типов в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2001. С. 3 – 5.
5. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа, индуцированный оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Там же. 2000. С. 35 – 38.

O. Belova

CONNECTIONS OF THREE TYPES IN THE BUNDLE OVER AREA OF THE PROJECTIVE SPACE

In the projective space the area described by a point is concidered. Over area there is a main bundle, standard fiber which one is a subgroup of a stationarity of a point. In this bundle preset fundamental-group connection on the Laptev. It is proved, that rigging of Bortolotti (the normalization of the Norden) considered area induces centerprojective connections of 3 types in associate bundle. The conditions of their coincidence are obtained. The geometrical interpretation of induced connection of 1-st type is given.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб КЦФЕ), кандидатский проект М03–2.1К–550.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт)

СКОМПОНОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучается специальный класс скомпонованных трехсоставных распределений проективного пространства P_n [1], который назван S-распределением [2]. Приведено задание S-распределения в репере первого порядка R_1. Дана геометрическая интерпретация голономности основных структурных распределений S-распределения. Рассмотрен двойственный образ регулярного S-распределения и двойственные проективные связности, ассоциированные с S-распределением. Введены в рассмотрение четыре новых класса регулярных гиперполос проективного пространства.

Во всей работе индексы пробегают следующие значения:

$$J,K,L=\overline{1,n};\quad \bar J,\bar K,\bar L=\overline{0,n};\quad i,j,k,l=\overline{r+1,m};\ p,q,s,t=\overline{1,r};$$

$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ u,v=\overline{r+1,n-1};\quad \hat u,\hat v,\hat\omega=\overline{r+1,n};$$

$$\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n};\ a,b,c=\overline{1,m};\ \hat A=(\overline{1,r};\ \overline{m+1,n});\quad \rho,\sigma,\tau=\overline{1,n-1}.$$

1. Выделим специальный класс $\mathcal{H}$-распределений [1], для которых M-распределение скомпоновано [3], т.е. $\Lambda(X)\cap L(X)=X$, $[\Lambda(X),L(X)]=M(X)$. Этот класс $\mathcal{H}$-распределений обозначается символом H(Λ,L) [1]. Кроме того, потребуем, чтобы а) характеристика Φ(X) (Φ-плоскость) гиперплоскости H(X), полученная при смещении центра X вдоль интегральных линий Λ-распределения, проходила через плоскость L(X); б) характеристика $\Psi(X)$ (Ψ-плоскость) гиперплоскости H(X), полученная при смещении центра X вдоль линий L-распределения, проходила через плоскость Λ(X), что в результате приводит к условиям

$$L^n_{ip}=0,\quad \Lambda^n_{pi}=0. \tag{1}$$

Условия (1) выделяют специальный класс скомпонованных $\mathcal{H}$(Λ,L)-распределений, которые назовем S-распределениями [2].

Репер 1-го порядка выбираем так, что

$$X\equiv A_0,\ \{A_p\}\subset\Lambda(A_0),\ \ \{A_i\}\subset L(A_0),\ A_\alpha\subset\chi_{n-m-1}(A_0)\overset{def}{=}\chi(A_0),$$

где $\chi(A_0)$ (χ-плоскость) – характеристика гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль интегральных кривых M-распределения. Имеем

$$\omega_\alpha^p = H_{\alpha K}^p \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = H_{\alpha K}^i \omega_0^K, \quad H_{\alpha p}^n = 0, \quad H_{\alpha j}^n = 0. \tag{2}$$

В силу условий (1; 2) S-распределение в P_n относительно репера R_1 задается следующим образом:

$$\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}} = M_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}} = H_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_i^n = L_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}} = M_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}} = H_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}},$$

$$\omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K = M_{pK}^\alpha \omega_0^K, \quad \omega_i^\alpha = L_{iK}^\alpha \omega_0^K = M_{iK}^\alpha \omega_0^K, \tag{3}$$

$$\omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \omega_i^p = L_{iK}^p \omega_0^K, \omega_\alpha^n = H_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \omega_\alpha^p = H_{\alpha K}^p \omega_0^K, \omega_\alpha^i = H_{\alpha K}^i \omega_0^K.$$

Системы величин $\mathit{\Gamma}_1 = \{\Lambda_{p\hat{A}}^n, L_{i\hat{u}}^n, \Lambda_{aK}^\alpha, \Lambda_{pK}^i, L_{iK}^p, H_{\alpha\hat{\beta}}^n\}$, $\mathit{\Gamma}_2 = \{\mathit{\Gamma}_1, H_{\alpha K}^a, \Lambda_{p\hat{A}K}^n, L_{i\hat{u}K}^n, \Lambda_{aKL}^\alpha, L_{pKL}^i, L_{iKL}^p, H_{\alpha\hat{\beta}L}^n\}$ образуют геометрические объекты [4] соответственно 1-го и 2-го порядков S-распределения.

2. Используем систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{J}}$ [5]:

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{1}{n+1}\Phi_K^0 \omega_0^K, \quad \overline{\omega}_0^n = \omega_0^n, \quad \overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0,$$

$$\overline{\omega}_0^p = \omega_0^p + \Lambda_n^{pq}\Lambda_{q\alpha}^n \omega_0^\alpha + \Lambda_n^{pq}\Lambda_{qn}^n \omega_0^n, \quad \overline{\omega}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\omega_q^0,$$

$$\overline{\omega}_0^i = \omega_0^i + L_n^{ik} L_{k\alpha}^n \omega_0^\alpha + L_n^{ik} L_{kn}^n \omega_0^n, \quad \overline{\omega}_0^\alpha = \omega_0^\alpha + H_n^{\alpha\beta} H_{\beta n}^n \omega_0^n,$$

$$\overline{\omega}_n^i = -L_n^{ik}\omega_k^0, \quad \overline{\omega}_n^\beta = -H_n^{\beta\alpha}\omega_\alpha^0, \quad \overline{\omega}_p^0 = \Lambda_{qp}^n \omega_n^q, \quad \overline{\omega}_p^i = -\Lambda_{qp}^n L_n^{ik}\omega_k^q,$$

$$\overline{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{1}{n+1}\Phi_K^0 \omega_0^K, \quad \overline{\omega}_p^\alpha = -\Lambda_{qp}^n H_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^q, \quad \overline{\omega}_i^0 = L_{ki}^n \omega_n^k,$$

$$\overline{\omega}_p^t = \omega_p^t + \Lambda_n^{tq}\Lambda_{qpK}^n \omega_0^K - \frac{1}{n+1}\delta_p^t \Phi_K^0 \omega_0^K, \quad \overline{\omega}_p^n = -\Lambda_{qp}^n \omega_0^q, \tag{4}$$

$$\overline{\omega}_i^l = \omega_i^l + L_n^{lj} L_{jiK}^n \omega_0^K - \frac{1}{n+1}\delta_i^l \Phi_K^0 \omega_0^K, \quad \overline{\omega}_i^p = -L_{ji}^n \Lambda_n^{pq}\omega_q^j,$$

$$\overline{\omega}_i^\alpha = -L_{ki}^n H_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^k, \quad \overline{\omega}_\alpha^0 = H_{\beta\alpha}^n \omega_n^\beta, \quad \overline{\omega}_i^n = -L_{ji}^n \omega_0^j,$$

$$\overline{\omega}_\alpha^i = -L_n^{ik} H_{\beta\alpha}^n \omega_k^\beta, \quad \overline{\omega}_\alpha^p = -\Lambda_n^{pq} H_{\beta\alpha}^n \omega_q^\beta, \quad \overline{\omega}_\alpha^n = -H_{\beta\alpha}^n \omega_0^\beta,$$

$$\overline{\omega}_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\beta} + H_{n}^{\beta\gamma} H_{\gamma\alpha K}^{n} \omega_{0}^{K} - \frac{1}{n+1} \delta_{\alpha}^{\beta} \Phi_{K}^{0} \omega_{0}^{K}.$$

Формы $\overline{\omega}_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\overline{J}}\}$, где $D\tau_{\overline{J}} = \overline{\omega}_{\overline{J}}^{\overline{K}} \tau_{\overline{K}}$. В статье [5] доказано, что преобразование $J: \omega_{\overline{K}}^{\overline{J}} \to \overline{\omega}_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ форм $\omega_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ проективного пространства по закону (4) является инволютивным, т.е. $J = J^{-1}$. Имея в виду эту инволютивность, будем говорить, что пространства P_n и $\overline{P}_n$ являются двойственными [6]. Дифференциальные уравнения регулярного $\overline{S}$-распределения, двойственного данному регулярному S-распределению, имеют вид, аналогичный уравнениям (3), (только все формы и функции, входящие в уравнения (3), пишутся с чертой сверху). Доказана

Теорема 1. *Регулярное скомпонованное S-распределение проективного пространства P_n во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует 1) проективное пространство $\overline{P}_n$, двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования J форм $\omega_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ по закону (4); 2) скомпонованное распределение $\overline{S} \subset \overline{P}_n$, двойственное исходному.*

На основании работы [6] доказаны следующие три теоремы.

Теорема 2. *На оснащенном в смысле Картана базисном Λ-распределении данного S-распределения индуцируется первая линейная проективная связность $\overset{1}{\gamma}$, определенная путем проектирования. Слоевые формы $\overset{1}{\omega}{}_{\overline{p}}^{\overline{q}}$ соответствующего пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{n,r}$ имеют вид*

$$\overset{1}{\omega}{}_{0}^{p} = \omega_{0}^{p} - \nu_{n}^{p}\omega_{0}^{n}, \quad \overset{1}{\omega}{}_{p}^{q} = \omega_{p}^{q} - \nu_{n}^{q}\omega_{p}^{n},$$

$$\overset{1}{\omega}{}_{p}^{0} = \omega_{p}^{0} - x_{\nu}^{0}\omega_{p}^{\nu} - \mu_{n}^{0}\omega_{p}^{n}, \quad \overset{1}{\omega}{}_{0}^{0} = \omega_{0}^{0} - x_{\nu}^{0}\omega_{0}^{\nu} - \mu_{n}^{0}\omega_{0}^{n},$$

где $\mu_n^0 = x_n^0 - x_v^0 \Lambda_n^v$, $\nabla \mu_n^0 + v_n^p \omega_p^0 - x_v^0 \omega_n^v + \omega_n^0 = \mu_{nK}^0 \omega_0^K$. *При любом смещении центра S-распределения оснащающая плоскость* $C_{n-r-1}(v_n^p)$ *в смысле Картана Λ-распределения не выходит из нормали 1-го рода тогда и только тогда, когда она неподвижна. При этом плоскость* $C_{n-r-1}(v_n^p)$ *является плоскостью Кенигса нормали* v_n^p, *а пространство* $\overset{1}{P}_{n,r}$ *является плоским.*

Теорема 3. *Оснащенное в смысле Картана регулярное базисное Λ-распределение данного S-распределения в* P_n, *кроме первой линейной связности проективного типа* $\overset{1}{\gamma}$, *в случае симметрии основного тензора* Λ_{pq}^n *индуцирует еще две линейные связности* $\overset{2}{\gamma}$, $\overset{3}{\gamma}$, *проективного типа, определяемые соответственно системами форм*

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{\omega}{}_0^p = \overset{1}{\omega}{}_0^p, \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0, \quad \overset{2}{\omega}{}_p^t = \overset{1}{\omega}{}_p^t + b_n^{ts} C_{spq}^n \overset{1}{\omega}{}_0^q + \Phi_{pv}^t \overset{1}{\omega}{}_0^v,\\
&\overset{2}{\omega}{}_p^0 = \overset{1}{\omega}{}_p^0 + (b_n^{ts} C_{spq}^n b_t + C_{spq}^n v_n^s) \overset{1}{\omega}{}_0^q + \Phi_{pv}^t (b_t + b_{st}^n v_n^s) \overset{1}{\omega}{}_0^v;\\
&\overset{3}{\omega}{}_0^p = \overset{1}{\omega}{}_0^p, \quad \overset{3}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0, \quad \overset{3}{\omega}{}_p^t = \overset{1}{\omega}{}_p^t + b_n^{ts} C_{spq}^n \overset{1}{\omega}{}_0^q + C_{pv}^t \overset{1}{\omega}{}_0^v,\\
&\overset{3}{\omega}{}_p^0 = \overset{1}{\omega}{}_p^0 + (b_n^{ts} C_{spq}^n b_t + C_{spq}^n v_n^s) \overset{1}{\omega}{}_0^q + C_{pv}^t (b_t + b_{st}^n v_n^s) \overset{1}{\omega}{}_0^v,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\overset{1}{\omega}{}_0^v = \omega_0^v - \Lambda_n^v \omega_0^n$. *При этом а) пространства* $\overset{1}{P}_{n,r}$ *и* $\overset{3}{P}_{n,r}$ *являются двойственными; б) пространства проективной связности* $\overset{1}{P}_{n,r}$ *и* $\overset{2}{P}_{n,r}$ *двойственны тогда и только тогда, когда* $\Phi_{pv}^t = H_{vp}^t + x_v^0 \delta_p^t = 0$. *В этом случае все три пространства* $\overset{1}{P}_{n,r}$, $\overset{2}{P}_{n,r}$, $\overset{3}{P}_{n,r}$ *попарно двойственны между собой.*

Теорема 4. *Оснащение в смысле Картана а) регулярной r-мерной гиперполосы* $H_r(M)$, *оснащенной полем касательных m-мерных плоскостей M,* $2 \le m < n-1$, *б) регулярной r-мерной гиперполосы* $H_r(L)$, *в) r-мерной полосы* $V_{r(m)}$ *порядка m, оснащенной полем касательных гиперплоскостей H, г) вырожденной центрированной* *распадающейся m-мерной гиперполосы ранга r индуцирует два пространства проективной связности* $\overset{1}{P}_{rr}$ *и* $\overset{2}{P}_{rr}$, *ассоциированных с указанными многообразиями (а – г), причем эти пространства двойственны относительно преобразований (5).*

3. а) Система уравнений $\omega_0^{\hat{v}} = 0$, ассоциированная [5] с S-распределением, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор неголономности базисного Λ-распределения $r_{pq}^{\hat{v}} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pq}^{\hat{v}} - \Lambda_{qp}^{\hat{v}})$. В этом случае проективное пространство P_n расслаивается 1) на (n-r)-параметрическое семейство регулярных гиперполос $SH_r(L)$ специального класса, 2) на (n-m)-параметрическое семейство вырожденных центрированных распадающихся m-мерных гиперполос H_m^r ранга r [1].

б) Система уравнений $\omega_0^{\hat{A}} = 0$, ассоциированная с S-распределением (L-распределением), вполне интегрируема тогда и только тогда, когда тензор неголономности $r_{ij}^{\hat{A}}$ оснащающего M-распределения равен нулю и M-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ,L) [2]. Проективное пространство P_n в этом случае расслаивается на (n-m)-параметрическое семейство m-мерных гиперполос H_m, базисная поверхность каждой из которых несет двухкомпонентную сопряженную систему $S(r,l)$ [2]. Такие гиперполосы мы называем касательно (r,l)-сопряженными [7] и обозначаем SH_m. Имеет место

Теорема 5. *Регулярная гиперполоса* SH_m *во второй дифференциальной окрестности ее образующего элемента индуцирует проективное пространство* $\overline{P}_n(V_m)$, *двойственное проективному пространству* $P_n(V_m)$ *относительно инволютивного преобразования форм* $\omega_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ *[7].*

Определение. Регулярную гиперполосу H_m назовем нормально (l,r)-кооснащенной гиперполосой NH_m, если ее базисная поверхность оснащена двумя полями нормальных плоскостей $N_{n-l}(A)$ и $N_{n-r}(A)$ таких, что в каждой точке $A \in V_m$ выполняется соотношение $N_{n-l}(A) \cap N_{n-r}(A) = N_{n-m}(A)$, где $N_{n-m}(A)$ - нормаль 1-го рода гиперполосы H_m в смысле Нордена-Чакмазяна.

Теорема 6. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка касательно (r,l)-сопряженная гиперполоса* SH_m *порождает относительно инволютивного преобразования структурных форм по закону* J_1 *[7] двойственный ей образ* $\overline{SH}_m \stackrel{def}{=} NH_m$ *– нормально (l,r)-сопряженную гиперполосу* NH_m*, определяемую уравнениями*

$$\overline{\omega}_0^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \overline{\omega}_p^n = \overline{\Lambda}_{pq}^n \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_i^n = \overline{L}_{ij}^n \overline{\omega}^j, \quad \overline{\omega}_p^\alpha = \overline{\Lambda}_{pq}^\alpha \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_p^i = \overline{\Lambda}_{pb}^i \overline{\omega}^b,$$

$$\overline{\omega}_\alpha^n = 0, \quad \overline{\omega}_i^\alpha = \overline{L}_{ij}^\alpha \overline{\omega}^j, \quad \overline{\omega}_i^p = \overline{L}_{ib}^p \overline{\omega}^b, \quad \overline{\omega}_\alpha^p = \overline{H}_{\alpha q}^p \overline{\omega}^q, \quad \overline{\omega}_\alpha^i = \overline{H}_{\alpha j}^i \overline{\omega}^j$$

относительно тангенциального репера $\{\tau_{\bar{J}}\}$.

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 172 с.

2. *Волкова С.Ю.* $\hat{H}(\Lambda, L)$-распределения проективного пространства // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 1991. Вып. 22. С. 23 – 25.

3. *Норден А.П.* Теория композиций // Пробл. геометрии. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 10. С.118 – 145.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. моск. матем. о-ва. М., 1953. № 2. С. 275 – 382.

5. *Волкова С.Ю.* О двойственных проективных связностях $\hat{H}(\Lambda, L)$-распределения // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 1993. Вып. 24. С. 28 – 37.

6. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары: Изд-во Чебоксар. гос. пед. ин-та, 1992. 290 с.

7. *Волкова С.Ю.* Двойственный образ регулярной гиперполосы SH_m // Диф. геом. многооб. фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998. Вып. 29. С.16 – 21.

S. Volkova

THE COMPOSED DISTRIBUTIONS OF THE PROJECTIVE SPACE

The special class of the composed three-compound distributions of the projective space is studied, which one is called as S-distribution. The task of S-distribution in a frame of 1-st order is adduced. The geometrical interpretation of a holonomicity of the main structural distributions of S-distribution is given. The dual image of regular S-distribution and dual projective connections, associate with S-distribution is considered. Four new classes regular hyperstrips of the projective space are entered into consideration.

УДК 514.75

М.А. Гаер
(Иркутский государственный университет)

ТЕОРИЯ КРИВЫХ И ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В СЕМИМЕРНОМ КОНФОРМНО-ОКТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В семимерном конформно-октавном пространстве *V* проведена канонизация репера кривой и гиперповерхности. Дана геометрическая характеристика канонического репера и инвариантов в пространстве *V*. Найдены кривые и гиперповерхности, для которых полученные реперы нельзя построить.

Введение

Рассмотрим конформно-октавное семимерное пространство V с фундаментальной группой $G_2 \cdot \left(R \setminus \{0\}\right)$, в котором с точностью до скалярного множителя определено векторное произведение [,]. Для октавного репера $\bar{e}_i$, $i = \overline{1,7}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}
[\bar{e}_1,\bar{e}_2]=\bar{e}_3,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_4]=\bar{e}_5,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_4]=\bar{e}_6,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_4]=\bar{e}_7,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_3]=-\bar{e}_2,\\
[\bar{e}_1,\bar{e}_5]=-\bar{e}_4,\ [\bar{e}_1,\bar{e}_6]=-\bar{e}_7,\\
[\bar{e}_1,\bar{e}_7]=\bar{e}_6,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_3]=\bar{e}_1,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_5]=\bar{e}_7,\ [\bar{e}_2,\bar{e}_6]=-\bar{e}_4,\\
[\bar{e}_2,\bar{e}_7]=-\bar{e}_5,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_5]=-\bar{e}_6,\ [\bar{e}_3,\bar{e}_6]=\bar{e}_5, \qquad (1)\\
[\bar{e}_3,\bar{e}_7]=-\bar{e}_4,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_5]=\bar{e}_1,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_6]=\bar{e}_2,\ [\bar{e}_4,\bar{e}_7]=\bar{e}_3,\ [\bar{e}_5,\bar{e}_6]=-\bar{e}_3,\\
[\bar{e}_5,\bar{e}_7]=\bar{e}_2,\ [\bar{e}_6,\bar{e}_7]=-\bar{e}_1.
\end{gathered}$$