УДК 514.8

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Д.Г.А м и ш е в а

(Кемеровский государственный университет)

В работе [1] определены периодические решения уравнений Кирхгофа как функции локальных координат. Чтобы движение, определенное уравнениями Кирхгофа, реализовать во внешнем пространстве, нужно определить периодические решения этих уравнений как функции времени.

В классической механике движение твердого тела описывается следующими общими уравнениями:

$$\dot{M} = M \times \omega + p \times u, \quad \dot{p} = p \times \omega, \qquad (\mathrm{I})$$

где M – кинетический момент тела, ω – угловая скорость тела, а векторы p, u определяют физическое содержание задачи и зависят от условий движения твердого тела. Обычно считают, что $\omega = \partial H/\partial M$, $u = \partial H/\partial p$, где $H(M, p)$ – некоторая известная функция на евклидовом пространстве $R^6 = R^3(M) \times R^3(p)$. Если в качестве H взять положительно определенную квадратичную форму на шестимерном пространстве R^6:

$$H(M,p) = \tfrac{1}{2}\langle AM, M\rangle + \langle BM, p\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Cp, p\rangle, \qquad (2)$$

то общие уравнения (I) превращаются в так называемые уравнения Кирхгофа, описывающие движение твердого тела в идеальной безграничной жидкости, где векторы p и $u = \partial H/\partial p$ обычно называются импульсивной силой и импульсивным моментом соответственно.

Предположим, что движущееся тело имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Тогда получим равенство: $B = 0$. Дифференциальные уравнения (I) имеют интеграл инергии (2) и еще два интеграла:

$$f_1 = \sum p_i^2 = p^2, \qquad f_2 = \sum M_i p_i = sp. \qquad (3)$$

В работе [1] вводятся сферические координаты θ и ψ:

$$p_1 = p\cdot\cos\theta\cdot\cos\psi, \quad p_2 = p\cdot\cos\theta\cdot\sin\psi, \quad p_3 = p\cdot\sin\theta,$$

что позволяет определить p_θ, p_ψ следующими формулами:

$$q_1 = p_\psi\,\mathrm{tg}\theta\cos\psi - p_\theta\sin\psi, \quad q_2 = p_\psi\,\mathrm{tg}\theta\sin\psi + p_\theta\cos\psi, \quad q_3 = -p_\psi. \qquad (4)$$

Тогда компоненты кинетического момента M принимают вид [1]:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{s}{p}\cdot p_1 + p_\psi\,\mathrm{tg}\theta\cos\psi - p_\theta\sin\psi, \\ M_2 = \frac{s}{p}\cdot p_2 + p_\psi\,\mathrm{tg}\theta\sin\psi + p_\theta\cos\psi, \quad M_3 = \frac{s}{p} p_3 - p_\psi \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим общую поверхность уровня интегралов $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = sp$. В настоящей работе ограничимся частным случаем $s = 0$, когда система уравнений (I) имеет не менее двух периодических орбит [1]. В результате мы получаем уравнение:

$$M_3\cdot\mathrm{tg}\theta + M_1\cdot\cos\psi + M_2\cdot\sin\psi = 0.$$

Если считать, что локальная координата ψ пропорциональна времени движения $\psi = k\cdot t$, то и вторая локальная координата выражается как функция времени из условия:

$$\mathrm{tg}\theta = -\frac{M_1(t)\cdot\cos kt + M_2(t)\cdot\sin kt}{M_3(t)}, \qquad (6)$$

где компоненты кинетического момента, представленные как функции времени, имеют вид:

$$M_1 = m\left(y(t)\cdot v_3(t) - z(t)\,v_2(t)\right), \quad M_2 = m\left(z(t)\cdot v_1(t) - x(t)\cdot v_3(t)\right),$$

$$M_3 = m\cdot\left(x(t)\,v_2(t) - y(t)\cdot v_1(t)\right).$$

Здесь m – масса тела; $x(t), y(t), z(t)$ – координаты центра масс; $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ – координаты вектора скорости тела.

Так как локальные координаты θ, ψ выражены как функции времени t, то локальные координаты касательного вектора $a(a_1, a_2)$ [3] к общей поверхности уровня будут являться функциями времени $a_1 = \frac{d\theta}{dt}$, $a_2 = \frac{d\psi}{dt} = k$, где $\frac{d\theta}{dt}$ можно определить из формулы (6).

Для того, чтобы определить компоненты кинетического момента в точках периодического решения по формулам (5), нужно найти ковектор (p_θ, p_ψ). Для этого определим симплектическую структуру по формуле [2]: $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\theta \wedge d\psi$, где g_{ij} – метрический тензор: $g_{11} = p^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = p^2\cdot\cos^2\theta$. Если $a(a_1, a_2)$ – касательный вектор к общей поверхности уровня, то соответствующий ковектор $\xi(\xi_1, \xi_2)$ находится из равенства [2]: $\xi_i = \sum \omega_{ij} a_j$. Отсюда имеем:

$$p_\theta = \xi_1 = \sqrt{\det(g_{ij})}\cdot k, \quad p_\psi = \xi_2 = \sqrt{\det(g_{ij})}. \qquad (7)$$

Подставляя соотношения (6), (7) в формулы (5), получим компоненты кинетического момента в точках периодического решения.

Чтобы определить интеграл энергии $H(M, p)$ как функцию времени, нужно еще определить величины (a_{ij}) и (c_{ij}) как функции времени. Напоминаем, что мы рассматриваем случай, когда движущееся тело имеет три плоскости симметрии, т.е. $b_{ij}=0$. Согласно общей теории динамики твердого тела матрица (a_{ij}) задает оператор инерции, элементы которого определяются по формулам:

$$a_{11}=m\cdot(y^2(t)+z^2(t)),\quad a_{22}=m\cdot(x^2(t)+z^2(t)),\quad a_{33}=m\cdot(x^2(t)+y^2(t)),$$

$$a_{12}=-m\cdot x(t)\cdot y(t),\quad a_{13}=-m\cdot x(t)\cdot z(t),\quad a_{23}=-m\cdot y(t)\cdot z(t),$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – координаты центра масс тела, а m – масса тела. Что касается матрицы (c_{ij}), то ее представление как функции времени будет дано в дальнейшем.

Библиографический список

I. Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника – Шнирельмана – Морса (ЛМШ).I // Функц. анализ и его приложения. I98I. Т.I5. Вып.3. С.54–66.

2. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. Изд-во Моск. ун-та, I988. 4I3 с.

3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, I979. 756 с.

4. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. Изд-во Моск. ун-та, I974. 645 с.

УДК 5I4.75

К ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б.А.Андреев

(Калининградский государственный университет)

Теория распределений гиперплоскостных элементов [I],[2] в проективном и аффинном пространствах является развитой ветвью дифференциальной геометрии. В настоящей работе показано, что задание этого распределения в пространстве A_m эквивалентно заданию отображения проективных пространств, что приводит к появлению структур теории точечных отображений [3],[4] в геометрии указанного распределения. Это позволило получить и охарактеризовать новые геометрические образы, присоединенные к распределению, и в некоторых случаях дать новые интерпретации известным. Доказан ряд предложений, связывающих, с одной стороны, проективитет Бомпиани-Пантази, инвариантные нормали и некоторые фокальные образы распределения с касательными отображениями, в том числе с локальной коллинеацией Чеха, $K(P_\alpha)$ – главными прямыми и главными точками отображения – с другой. Символ (2.N) [2] указывает на формулу (2.N) статьи [2].

Рассмотрим m-мерное проективное пространство P_m, в котором зафиксирована гиперплоскость P_{m-1}. Отнесем пространство P_m к подвижному реперу $\widetilde{R}=\{R_0, R_\alpha\}$ $(\alpha,\ldots=\overline{1,m})$; деривационные формулы репера $\widetilde{R}$ имеют вид

$$d\bar{R}_J=\widetilde{\omega}_J^{\,\mathcal{J}}\bar{R}_{\mathcal{J}}\quad (J,\ldots=\overline{0,m}). \tag{I}$$

Формы Пфаффа $\widetilde{\omega}_J^{\,\mathcal{J}}$ подчиняются уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\widetilde{\omega}_J^{\,\mathcal{J}}=\widetilde{\omega}_J^{\,K}\wedge\widetilde{\omega}_K^{\,\mathcal{J}}. \tag{2}$$

Поместив в гиперплоскость P_{m-1} вершины R_α, имеем:

$$\widetilde{\omega}_\alpha^0\equiv 0. \tag{3}$$

Будем рассматривать P_m как расширенное аффинное пространство $\widetilde{A}_m$ с несобственной гиперплоскостью P_{m-1}; при этом в силу (2) формы Пфаффа

$$\omega^\alpha=\widetilde{\omega}_0^\alpha,\quad \omega_\alpha^\beta=\widetilde{\omega}_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\,\widetilde{\omega}_0^0 \tag{4}$$

подчиняются уравнениям структуры m-мерного аффинного пространства $A_m=\widetilde{A}_m\setminus P_{m-1}$ и совпадают с компонентами инфинитезимальных перемещений репера $R=\{M,\vec{e}_\alpha\}$, где $M=R_0$, а единичная точка репера $\widetilde{R}$ совпадает с концом вектора $\sum_{\alpha=1}^{m}\vec{e}_\alpha$. Полагая $n+1=m$, мы приходим к рассмотренному в [2] пространству A_{n+1} с подвижным репером R. С другой стороны, расширяя A_m до $\widetilde{A}_m$, мы однозначно получаем P_m с фиксированной гиперплоскостью $P_n\subset P_m$. Заметим, что из (2) и (3) вытекает

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \tag{5}$$

Это означает, что точки R_α образуют подвижный репер n-мерного проективного пространства P_n.

В репере нулевого порядка распределение $\mathfrak{A}$ гиперплоскостных элементов (M,Γ) задается системой (I.4) [2]:

$$\omega_i^m=L_{i\alpha}\omega^\alpha\quad (i=\overline{1,n}). \tag{6}$$

Пусть Λ – подпространство в A_m (или P_m), а $\widetilde{\Lambda}$ – его замыка-