полярной корреляции $\overset{\circ}{K}$ (т.е. $a^{\circ}_{12}=a^{\circ}_{21}$ $\{a^{\circ}_{34}=a^{\circ}_{43}\}$) и точка B не принадлежит плоскости $\widetilde{\Delta}_2(A)$ $\{\Delta_2(A)\}$ распределения $\widetilde{\Delta}_2$ $\{\Delta_2\}$.

При смещении точки A вдоль любого направления двумерного распределения Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ точка N^1_1 $\{N^3_3\}$ -неподвижна.

Следствие. Если связность эквиаффинна $a^{\circ}_{ij}=a^{\circ}_{ji}$,то размерности многообразий (N^1_1), (N^3_3) равны двум.

Теорему 2 можно сформулировать иначе:

Теорема 2. Если точка B не принадлежит плоскостям распределений Δ_2, $\widetilde{\Delta}_2$,то $\dim(N^1_1)$ $\{\dim(N^3_3)\}$ равна двум тогда и только тогда,когда распределение Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ голономно.

III случай.

Теорема 3. Размерность многообразия (N^1_1) равна единице тогда и только тогда,когда точка B принадлежит плоскости распределения $\widetilde{\Delta}_2(A)$.

При смещении точки A вдоль любого направления трехмерного распределения Δ_3: $\Delta_3(A)=(AA_1A_2C)$ точка N^1_1 -неподвижна.При этом в общем случае $\dim(N^3_3)=3$. Распределение $\widetilde{\Delta}_2$: $\widetilde{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$ становится голономным. Плоскости этого распределения касаются поверхности V_2: $\omega^1=0$, $\omega^2=0$, которая является развертывающейся поверхностью.Направление (AB) - единственное асимптотическое направление на ней.

Теорема, аналогичная теореме 3,справедлива для многообразия (N^3_3). Можно показать,что размерности многообразий (N^1_1), (N^3_3) одновременно не могут быть равны единице.

IУ случай. Пусть $\dim(N^1_1)=0$ $\{\dim(N^3_3)=0\}$. Если выполнено требование $N^1_1\neq C$ $\{N^3_3\neq C\}$,то мы придем к противоречивой системе уравнений. Это означает,что для отображения,которое рассматривается в данной работе,точки N^1_1, N^3_3 неподвижными быть не могут.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1975.Вып.6.С.19-25.

2.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.:Наука,1976.

3.К и р е е в а С.В. О паре сетей//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1983.Вып.14.С.26-31.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Л.Г.К о р с а к о в а
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции H [1],образующим элементом которых является пара коник,лежащих в различных плоскостях,причем коника C_1 касается линии ℓ пересечения своих плоскостей в точке A_1 ,а коника C_2 пересекает линию ℓ в точках A_1 и A_2 . Плоскости коник образуют двумерные многообразия.Выделен и геометрически охарактеризован один из частных классов конгруэнций H .

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4})$,где линейные дифференциальные формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию эквипроективности $\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3+\omega^4_4=0$. Вершины A_3 и A_4 репера R выберем таким образом,чтобы треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2 .

Определение I. Конгруэнцией H^Q назовем такую конгруэнцию H ,в которой каждая коника C_2 конгруэнции (C_2) инцидентна одной квадрике Q .

Уравнения коник C_1, C_2, квадрики Q в репере R при соответствующей нормировке вершин A_α и система дифференциальных уравнений конгруэнции H^Q имеют вид:

$$(x^2)^2-2x^1x^3=0,\quad x^4=0;\qquad (x^4)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0;$$

$$(x^4)^2-2x^1x^2+x^3(2ax^1+2bx^2+2cx^4+hx^3)=0;$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\omega^1_2=b\omega^3_2,\quad \omega^2_1=a\omega^3_1,\quad \omega^1_4=\omega_2+b\omega^3_4+c\omega^3_2,\\
&\omega^2_4=\omega_1+a\omega^3_4+c\omega^3_1,\quad \Omega_2=2c\omega^3_4+a\omega^3_2+b\omega^3_1,\quad \omega^3_1=\Gamma^{3k}_1\omega_k,\\
&\omega^3_2=\Gamma^{3k}_2\omega_k,\quad \omega^3_4=\Gamma^{3k}_4\omega_k,\quad \omega^4_3=\Gamma^{4k}_3\omega_k,\quad \omega^1_3=\Gamma^{1k}_3\omega_k,\quad \omega^2_3=\Gamma^{2k}_3\omega_k,\\
&\Omega_1=a^k\omega_k,\ da=a(\omega^1_1+\omega^3_3-2\omega^4_4)-2ac\omega^3_4-\omega^2_3+b\omega^2_1+c\omega_1+h\omega^3_1,\\
&db=b(\omega^2_2+\omega^3_3-2\omega^4_4)-2bc\omega^3_4-\omega^1_3+a\omega^1_2+c\omega_2+h\omega^3_2,\\
&dc=c(\omega^3_3-\omega^4_4)+\omega^4_3+a\omega^1_4+b\omega^2_4+\omega^3_4(h-2c^2),\\
&\tfrac{1}{2}dh=h(\omega^3_3-\omega^4_4)+c\omega^4_3+b\omega^2_3+a\omega^1_3-ch\omega^3_4,
\end{aligned}\right.\qquad (\mathrm{I})$$

где обозначено $\omega_i = \omega_i^4$, $\Omega_1 = \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2$, $\Omega_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4$ ($i,j,k = 1,2$; $i \neq j$, по i,j не суммировать).

Доказано, что конгруэнции H^Q существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 2. Парой H_0^Q называется такая пара H^Q, для которой: 1) прямые A_1A_2, A_3A_4 и точки A_3, A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q; 2) поверхность (A_4) является огибающей семейства плоскостей коник C_2, для которой линии A_4A_i есть асимптотические касательные.

Из определения пары H_0^Q следует, что она характеризуется соотношениями: $a = b = c = 0$, $\omega_4^3 = 0$, $\Gamma_1^{32} = \Gamma_2^{31} = 0$. Замыкая уравнение $\omega_4^3 = 0$, имеем $\Gamma_1^{31} = \Gamma_2^{32} \stackrel{def}{=} \gamma$. Система пфаффовых уравнений пары H_0^Q запишется в виде

$$\begin{cases} \omega_i^j = 0, \quad \omega_4^i = \omega_j, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_3^i = k\omega_j^3, \quad \omega_i^3 = \gamma\omega_i, \quad \Omega_2 = 0, \\ \Omega_1 = a^k\omega_k, \quad dk = 2k(\omega_3^3 - \omega_4^4), \quad d\gamma = \gamma(\omega_4^4 - \omega_3^3). \end{cases} \quad (2)$$

Анализируя систему (2), убеждаемся, что конгруэнции H_0^Q существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Для конгруэнции H_0^Q справедливы следующие свойства: 1) прямые (A_iA_3), (A_iA_4) образуют одномерные многообразия; 2) плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства; 3) пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) односторонне расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2); 4) поверхность (A_3) – характеристическая; 5) асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) соответствуют; 6) точки A_1 и A_3 являются фокальными точками коники $C_1 \in (C_1)$; 7) поверхности (A_3) и (A_4) являются невырожденными инвариантными квадриками, причем все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) касаются инвариантного конуса K вдоль одной и той же коники C_3; 8) (A_i) – линия, совпадающая с коникой C_3.

Поверхности Q, (A_3) и (A_4) определяются соответственно уравнениями

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 + k(x^3)^2 = 0,$$

$$(1 - k\gamma^2)(x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2k\gamma x^3x^4 = 0,$$

$$(k\gamma^2 - 1)(x^3)^2 - 2\gamma^2x^1x^2 + 2\gamma x^3x^4 = 0.$$

Все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) пересекаются по одной и той же конике.

Уравнение конуса K, которого касаются все квадрики Q, (A_3) и (A_4) вдоль коники C_3, имеет вид $k^2\gamma^2(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2(1 + k\gamma^2)x^1x^2 + 2k\gamma x^3x^4 = 0$.

Библиографический список

1. К о р с а к о в а Л.Г. Об одном классе конгруэнций пар коник в P_3 // Тезисы докл. VI Прибалт. геометр. конф. Таллин, 1984. С. 63.

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЦИКЛОВ И ОРИСФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.С. М а л а х о в с к и й
(Калининградский государственный университет)

Получены структурные формы орицикла и орисферы в интерпретации Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Исследованы фокальные многообразия конгруэнций орициклов и орисфер. Доказано, что конгруэнция орициклов имеет не более трех собственных фокальных поверхностей. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 невырожденную нелинейчатую квадрику Q_0 и примем ее за абсолют пространства $Л_3$. В интерпретации Кэли-Клейна точки пространства $Л_3$ интерпретируются внутренними точками абсолюта, прямые – хордами абсолюта, причем точки абсолюта Q_0 являются несобственными точками расширенного пространства $Л_3$.

Орицикл C интерпретируется специальным типом нераспадающейся кривой второго порядка, касающейся абсолюта Q_0 в одной из его точек A_0 и расположенной внутри абсолюта, а орисфера S – невырожденной нелинейчатой квадрикой, касающейся Q_0 в точке A_0 и также лежащей внутри абсолюта [1]. Так как орицикл (орисфера) является кривой (поверхностью), ортогональной ко всем прямым пучка (связки) параллельных в заданном направлении прямых пространства $Л_3$, т.е. хорд абсолюта Q_0 с общим концом A_0, то для любой точки $M \in C$ ($M \in S$) полюс A_M касательной к орициклу C (касательной плоскости к орисфере S) в точке M относительно сечения Γ абсолюта Q_0 плоскостью орицикла C (соответственно относительно абсолюта Q_0) лежит на прямой A_0M.

Отнесем орицикл C (орисферу S) к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_3 – произвольная точка сечения Γ (абсолюта Q_0), A_1 и A_2 полярно сопряжены между собой и расположены на прямой, полярно сопря-