ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.II 1980

В.К.Драгунов

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕВЫПУКЛОЙ МЕТРИКИ МИНКОВСКОГО

В предлагаемой статье рассматривается метризация аффинной плоскости A^2 с помощью функции $\rho(x,y)$, отличной от метрической функции $m(x,y)$ Минковского [1] тем, что аксиоматическое определение метрической функции $\rho(x,y)$ не содержит неравенства $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Обосновывается непротиворечивость аксиоматики такой метрики. Приводится определение ρ-метрики (так называем метрику, заданную функцией $\rho(x,y)$) в традиционном для геометрии Минковского стиле, т.е. с использованием индикатрисы длин. Показывается эквивалентность аксиоматического и традиционного определений.

Пусть в аффинной плоскости A^2 с фиксированной координатной системой $O\xi_1\xi_2$ задана вещественная функция $\rho(x,y)$, удовлетворяющая следующим требованиям:

I/ $\rho(x,y)\ge 0$, при этом $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2/ для любых точек x,y и точки z такой, что $z=(1-\lambda)x+\lambda y$, имеет место $\rho(x,z)=|\lambda|\rho(y,x)$;

3/ для любой тройки точек x,y,z справедливо равенство

$$\rho(x,z)=\mu\left[\rho(x,y)+\rho(y,z)\right], \tag{1}$$

где $\mu=\mu(x,y,z)$ – некоторая вещественная функция, обладающая следующими свойствами:

а/ μ – непрерывная функция на всей области определения Ω, состоящей из всевозможных троек (x,y,z) точек, кроме таких троек, в которых $x=y=z$;

б/ для любых пяти точек x,y,z,x',y' таких, что $x+x'=y+y'=2z$, имеет место $\mu(x,y,z)=\mu(x',y',z')$.

Будем называть функцию $\rho(x,y)$ невыпуклой метрической функцией Минковского, а определяемую ею метрику – ρ-метрикой. Плоскость A^2 с введенной в ней ρ-метрикой будем называть ρ-плоскостью и обозначать M^2_ρ. Очевидно, ρ-плоскость обобщает понятие плоскости Минковского в том смысле, что, если $\mu(x,y,z)\le 1$ при выборе любой тройки (x,y,z) из Ω, то (1) следует заменить неравенством $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Поэтому аксиоматика ρ-метрики будет определять обычную метрику Минковского.

Убедимся в непротиворечивости системы аксиом I/-3/. С этой целью рассмотрим определение ρ'-метрики.

Пусть $F(x)$ – некоторая вещественная функция, определенная на A^2 и удовлетворяющая следующим условиям:

I/ $F(x)>0$ при $x\ne 0$;

2/ $F(\alpha x)=|\alpha|F(x)$ при любом вещественном α;

3/ $F(x)=1$ – уравнение замкнутой невыпуклой, вообще говоря кривой, внутри которой имеются точки.

Тогда $F(x-y)$ будем называть ρ'-метрикой, т.е.

$$\rho'(x,y)=F(x-y). \tag{2}$$

Убедимся, что справедливо утверждение

I. ρ'-метрика удовлетворяет I/-3/ ρ-метрики, т.е. она является ρ-метрикой.

Действительно, выполнимость аксиом I/ и 2/ ρ-метрики следует из свойств I/ и 2/ функции $F(x)$ и проверяется непосредственной заменой в формулировках аксиом I/ и 2/ метрической функции $\rho(x,y)$ через $F(x-y)$.

Из свойств I/, 2/ функции $F(x)$ следует симметричность и звездность кривой Γ: $F(x)=1$ относительно начала O фиксированной системы координат. Поэтому, если обозначим через y точку пересечения луча L, выходящего из начала O и содержащего точку $x-y$, с линией Γ (см. рис. I), то получим для точки $x-x'=(1-\lambda)0+\lambda y$

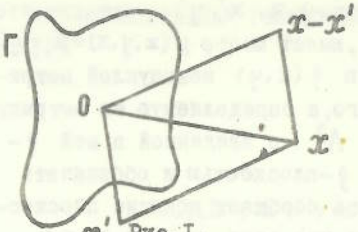


Рис.I.

следующее значение функции

$$F(x-x') = F(\lambda y) = \lambda. \quad (3)$$

Убедимся в справедливости аксиомы 3 ρ-метрики для функции $F(x-y)$. Для этого покажем, что функция

$$\mu' = \frac{F(x-z)}{F(x-y)+F(y-z)} \quad (4)$$

удовлетворяет требованиям а и б.

С в о й с т в о а/. Из (4) ясно, что разрыв функции, если он возможен, допускается для троек точек (x,y,z), в которых хотя бы одна из функций вида $F(u-v)$ разрывна, или для троек, в которых $F(x-y)+F(y-z)=0$. Первая возможность разрыва оказывается несостоятельной ввиду (3), а также вследствие замкнутости и звездности кривой Γ. Вторая возможность также отпадает, так как она осуществима только лишь в случае, если $x=y=z$.

С в о й с т в о б/. Пусть точки x,y,z,x',y' таковы, что $x+x'=y+y'=2z$. Тогда z является общей аффинной серединой отрезков xx' и yy', а отрезок $x'y'$ является образом отрезка yx в параллельном переносе $\overrightarrow{xy'}$. Из этого, вследствие очевидной инвариантности $F(u-v)$ при параллельных переносах, из (4) получаем $\mu(x,y,z) = \mu(x',y',z)$.

Итак, искомое доказано. Следовательно, аксиоматика ρ-метрики непротиворечива, так как имеются кривые, удовлетворяющие определению ρ-метрики.

Приведем некоторые следствия из определения ρ-метрики.

2. Для любой фиксированной точки x и переменной точки x' имеем $\rho(x,x') \to 0 \Leftrightarrow x' \to x$, где под $x' \to x$ будем понимать сближение точек в смысле естественной топологии аффинной плоскости.

3. ρ-метрика непрерывна, т.е.

$$(x' \to x,\ y' \to y \Leftrightarrow \rho(x',y') \to \rho(x,y).$$

4. ρ-метрика симметрична, т.е. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Справедливость этого предложения следует непосредственно из аксиомы 2 ρ-метрики.

5. ρ-метрика инвариантна относительно параллельных переносов, т.е.

$$(x' = \vec{a}(x),\ y' = \vec{a}(y)) \Rightarrow \rho(x',y') = \rho(x,y).$$

6. ρ-метрика Минковского невыпукла, т.е. для точек x,y,z, среди которых x,y – любые точки, а $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, неравенство

$$\rho[(1-\lambda)x + \lambda y] \le (1-\lambda)\rho(x) + \lambda\rho(y);$$

вообще говоря, не выполняется.

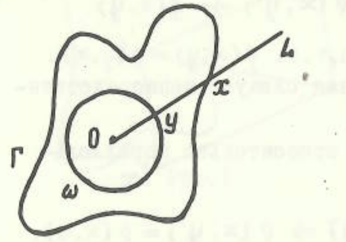
Приведем теперь предложение, обратное утверждению I.

7. ρ-метрика в плоскости A^2, отнесенной к координатной системе $O\xi_1\xi_2$, представляется в виде $F(x-y)$, где $F(x)$-функция, удовлетворяющая требованиям I -3, указанным в предложении I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическая функция $\rho(x,y)$ вследствие утверждения 5 может рассматриваться как функция одной точки $x-y$. Поэтому $\rho(x,y) = F(x-y)$. Из аксиом 1 и 2 ρ-метрики для функций $F(\xi)$ легко вытекает выполнимость 1, 2.

Убедимся в том, что требование 3 для $F(\xi)$ также выполняется, т.е. покажем, что линия Γ: $F(\xi)=1$ замкнута и, вообще говоря, невыпукла.

Из свойств I, 2 функции $F(\xi)$ следует, что кривая Γ является звездной кривой с центром O. Более того, любой луч L, выходящий из O, пересекает Γ в некоторой точке x, так как в противном случае для любой его точки y, отличной от O, $\rho(O,y)=0$. Это противоречит аксиоме 1 ρ-метрики. Вследствие сказанного, кривая Γ гомеоморфна единичной (в евклидовом смысле) окружности ω с центром в точке O (см. рис.2), так как отображение $\gamma:\ \omega \to \Gamma$, при котором $x=\gamma(y)$, где $\{x\}=L(y)\cap\Gamma$, а y -любая точка на ω , взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Поэтому Γ - замкнутая кривая.



Кроме этого, Γ-невыпуклая кривая, так как в противном случае $\rho(x,z) \le \rho(x,y)+\rho(y,z)$ для любой тройки из Ω , что противоречит выбору μ .

Список литературы

1. Б у з е м а н Г. Геометрия геодезических. Физматгиз, М., 1962.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

В.Г. И в а н о в

ОБОБЩЕННЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе рассматривается класс пространств с обобщенным параллелизмом на проективной плоскости P^2 с выделенной гладкой кривой, дается аналитический признак этого класса.

1. Пусть M_2 -дифференцируемое многообразие класса C^∞ . Обозначим через $G_1(M_2)$ многообразие линейных элементов многообразия M_2 , элемент которого будем называть направлением. Расслоение $G_1(M_2)$ является проективизацией касательного расслоения: его можно получить из касательного расслоения $T(M_2)$, заменив каждое касательное линейное пространство размерности два одномерным проективным пространством.

О п р е д е л е н и е. Обобщенным параллелизмом на дифференцируемом многообразии M_2 называется произвольная гладкая тривиализация

$$t:\ G_1(M_2) \longrightarrow P^1 \qquad (1)$$

расслоения $G_1(M_2)$ линейных элементов многообразия M_2.

Ограничение отображения t на каждом слое P^1_x , $x\in M_2$ расслоения $G_1(M_2)$ является диффеоморфизмом $[x]: P^1_x \to P^1$. Пусть $a \in P^1$, тогда $t^{-1}(a)$ есть множество линейных элементов, взятых по одному из каждого слоя P^1_x над точкой $x\in M_2$, т.е. множество направлений $G_1(M_2)$ разбивается на классы: одному классу принадлежат те линейные элементы, которые при отображении t имеют один и тот же об-