УДК 514.75

А. В. Кулешов

*(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ СЕМЕЙСТВА ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследуются связности на произвольном гладком семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве. Показано, что композиционное оснащение такого семейства индуцирует трехпараметрическую связку многопараметрических пучков фундаментально-групповых связностей. Из каждого пучка выделено по одной индуцированной связности. Приведены условия совпадения полученных связностей, а также дана их геометрическая интерпретация при помощи параллельных перенесений и центральных проектирований.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство центрированных плоскостей, композиционное оснащение, фундаментально-групповая связность, параллельное перенесение, центральное проектирование, метод Картана — Лаптева.

§ 1. Уравнения семейства B_r центрированных плоскостей

Отнесем n-мерное вещественное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{ A, A_I \}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I \,, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \,, \; I, J, \ldots = \overline{1,n} \,,$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют уравнениям Картана [10, с. 121]

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K,$$
$$D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \omega^J \wedge (-\delta_K^I \omega_J - \delta_J^I \omega_K).$$

Центрированной m-мерной плоскостью L_m^* $(1 \le m < n)$ проективного пространства P_n размерности n будем называть m-мерную плоскость L_m с выделенной на ней точкой (называемой центром плоскости). Гладкое r-мерное многообразие, образующий элемент которого — центрированная плоскость, назовем семейством центрированных плоскостей и будем обозначать B_r, где $1 \le r < m(n-m)+n$ (см. [1; 3; 4; 8]). Такое семейство можно рассматривать как образ произвольного r-мерного многообразия V_r при гладком регулярном отображении в пространство всех центрированных m-плоскостей $B(m,n)$ проективного пространства P_n. Многообразие V_r будем называть пространством параметров семейства B_r.

Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершину A в центр плоскости L_m^*, а вершины A_a — на плоскость L_m^*. Система уравнений семейства B_r центрированных плоскостей L_m^* в параметрической форме имеет вид [3; 8]:

$$\omega^a = \Lambda_i^a \theta^i,\ \omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i,\ \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i,$$
$$a,b,\ldots = \overline{1,m};\ \alpha,\beta,\ldots = \overline{m+1,n};\ i,j,\ldots = \overline{1,r},$$

где формы Пфаффа θ^i являются структурными формами r-мерного гладкого многообразия V_r и удовлетворяют уравнениям $D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i$, а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ образует фундаментальный тензор многообразия B_r, содержащий три подтензора: $\Lambda_i^\alpha, \{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_i^a\}, \{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$.

С многообразием B_r ассоциировано главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями, полученными в [8]. Базой этого расслоения выступает само многообразие B_r, а типовым слоем — s-членная подгруппа стационарности G_s плоскости L^*_m, где $s = n(n+1) - m(n-m)$. Расслоение $G_s(B_r)$ имеет два простейших и два простых фактор-расслоения [3]. По отношению к расслоению $G_s(B_r)$ формы θ^i являются базовыми, а ω^a_b, ω^α_β, ω_a, ω^a_α, ω_α — слоевыми [2, с. 52].

§ 2. Ассоциированные связности на многообразии B_r

Фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву в главном расслоении $G_s(B_r)$ задается с помощью форм

$$\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\theta^i, \quad \tilde\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\theta^i, \quad \tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i,$$
$$\tilde\omega^a_\alpha = \omega^a_\alpha - \Gamma^a_{\alpha i}\theta^i, \quad \tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i}\theta^i, \tag{2.1}$$

причем компоненты объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma_{ai}, \Gamma^a_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha i}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [8], полученным с использованием теоремы Картана — Лаптева [2, с. 81—83]:

$$\Delta\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\theta^j, \ \Delta\Gamma^\alpha_{\beta i} + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\theta^j,$$
$$\Delta\Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j, \ \Delta\Gamma^a_{\alpha i} - \Gamma^a_{bi}\omega^b_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega^a_\beta + \omega^a_{\alpha i} = \Gamma^a_{\alpha ij}\theta^j,$$
$$\Delta\Gamma_{\alpha i} + \Gamma^a_{\alpha i}\omega_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\omega_\beta - \Gamma_{ai}\omega^a_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\theta^j,$$

где формы ω^a_{bi}, $\omega^\alpha_{\beta i}$, ω_{ai}, $\omega^a_{\alpha i}$ являются линейными комбинациями слоевых форм с коэффициентами $\Lambda^a_i, \Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai}$.

Замечание. Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом, например, на компоненты Γ^a_{bi}:

$$\Delta\Gamma^a_{bi} = d\Gamma^a_{bi} + \Gamma^c_{bi}\omega^a_c - \Gamma^a_{ci}\omega^c_b - \Gamma^a_{bj}\theta^j_i.$$

Объект Γ содержит два простейших и два простых подобъекта:

1) Γ^a_{bi} — объект плоскостной линейной связности;

2) $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ — объект нормальной линейной связности;

3) $\Gamma_1 = \{ \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai} \}$ — объект центропроективной связности;

4) $\Gamma_2 = \{ \Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i} \}$ — объект аффинно-групповой связности.

§ 3. Композиционное оснащение семейства B_r

Композиционным оснащением (ср. [7, с. 83]) семейства B_r называется присоединение к каждой плоскости L^*_m:

1) *(m–1)*-плоскости N_{m-1}, лежащей в плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр A (аналог нормали 2-го рода А. П. Нордена);

2) *(n–m–1)*-плоскости C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m (аналог плоскости Э. Картана).

Замечание. Композиционное оснащение является аналогом сильной нормализации, введенной А. П. Норденом для поверхности в проективном пространстве [5, с. 206].

Оснащающие плоскости C_{n-m-1}, N_{m-1} определяются системами базисных точек

$$B_a = A_a + \lambda_a A, \; B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A, \tag{3.1}$$

где компоненты оснащающего квазитензора $\lambda = \{ \lambda_a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha \}$ удовлетворяют уравнениям [8]

$$\begin{gathered} \Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\theta^i, \\ \Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\theta^i, \\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i, \end{gathered} \tag{3.2}$$

которые обеспечивают инвариантность плоскостей C_{n-m-1} и N_{m-1} при фиксации образующего элемента L_m^* семейства B_r. Плоскость N_{n-m}, натянутая на плоскость C_{n-m-1} и точку A, является аналогом нормали 1-го рода Нордена, порожденной плоскостью Картана, а плоскость P_{n-1}, натянутая на плоскости N_{m-1} и C_{n-m-1}, — аналогом гиперплоскости Бортолотти, натянутой на плоскость Картана и нормаль 2-го рода.

Обозначим $\lambda' = \{\lambda_{ai}, \lambda^a_{\alpha i}, \lambda_{\alpha i}\}$ объект из пфаффовых производных оснащающего квазитензора λ, тогда $\{\lambda, \lambda'\}$ — продолженный оснащающий объект (ср. [7, с. 50]). Он образует геометрический объект лишь в совокупности с фундаментальным тензором семейства B_r^*.

Дифференциалы точки A и базисных точек (3.1) оснащающих плоскостей запишем в виде [4]:

$$dA = (\theta - \omega^a \lambda_a - \omega^\alpha \mu_\alpha)A + (M_i^a B_a + \Lambda_i^\alpha B_\alpha)\theta^i, \qquad (3.3)$$

$$dB_a = \theta B_a + (\omega_a^b + \lambda_a \omega^b)B_b + (M_{ai}^\alpha B_\alpha + t_{ai}A)\theta^i, \qquad (3.4)$$

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a^\beta + \lambda_\alpha \omega^\beta)B_\beta + (t_{\alpha i}^a B_a + t_{\alpha i}A)\theta^i, \qquad (3.5)$$

где совокупность величин

$$\begin{aligned} t_{ai} &= \lambda_{ai} - \Lambda_i^b \lambda_b \lambda_a - M_{ai}^\alpha \mu_\alpha, \\ t_{\alpha i}^a &= \lambda_{\alpha i}^a + \lambda_\alpha M_i^a - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^b \Lambda_{bi}^\beta, \\ t_{\alpha i} &= \lambda_{\alpha i} - \Lambda_{ai}^\beta \lambda_\alpha^a \lambda_\beta - \Lambda_i^\beta \lambda_\beta \lambda_\alpha - \lambda_a t_{\alpha i}^a \end{aligned} \qquad (3.6)$$

образует тензор $t = \{t_{\alpha i}^a, t_{\alpha i}, t_{ai}\}$, содержащий три простейших подтензора: $\{t_{\alpha i}^a\}$, $\{t_{\alpha i}\}$, $\{t_{ai}\}$. При этом $M_{ai}^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha + \lambda_a \Lambda_i^\alpha$, $M_i^a = \Lambda_i^a - \Lambda_i^\beta \lambda_\beta^a$ — тензоры, а величины μ_α имеют вид $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^b \lambda_b$.

Из (3.3) видим, что обращение тензора M_i^a в нуль характеризует такие оснащенные семейства B_r, у которых центры плоскостей L_m^* смещаются вдоль соответствующих нормалей первого рода N_{n-m}, а обращение в нуль тензора M_{ai}^α выделяет семейства B_r, у которых нормали N_{m-1} смещаются в соответствующих плоскостях L_m^*.

Случаи обращения в нуль подтензоров тензора t геометрически характеризуются соответствующими специальными смещениями оснащающих плоскостей (см. табл.), при этом никаких ограничений на семейство B_r не накладывается. Таким образом, вырождение тензора t ограничивает подвижность оснащающих плоскостей, поэтому назовем его *тензором подвижности*.

Классификация специальных типов композиционного оснащения для произвольного семейства B_r

Аналитическое условие	Геометрическая интерпретация
1. $t_{\alpha i} = 0$	C_{n-m-1} *смещается в* P_{n-1}
2. $t_{\alpha i}^a = 0$	C_{n-m-1} *смещается в* N_{n-m}
3. $t_{ai} = 0$	N_{m-1} *смещается в* P_{n-1}
4. $t_{\alpha i} = 0$, $t_{\alpha i}^a = 0$	C_{n-m-1} *неподвижна*
5. $t_{\alpha i} = 0$, $t_{ai} = 0$	P_{n-1} *неподвижна*
6. $t_{\alpha i}^a = 0$, $t_{ai} = 0$	C_{n-m-1} *смещается в* N_{n-m}, N_{m-1} *смещается в* P_{n-1}
7. $t_{\alpha i} = 0$, $t_{\alpha i}^a = 0$, $t_{ai} = 0$	C_{n-m-1} *и* P_{n-1} *неподвижны,* N_{m-1} *смещается в* P_{n-1}

§ 4. Связки и пучки индуцированных связностей

Внося формы связности (2.1) в уравнения (3.2), получим следующие равенства:

$$\nabla\lambda_a = \nabla_i\lambda_a\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha^a = \nabla_i\lambda_\alpha^a\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha = \nabla_i\lambda_\alpha\theta^i. \tag{4.1}$$

В их левых частях стоят ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора λ относительно групповой связности Γ (см. в [1; 3]):

$$\nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\widetilde{\omega}_a^b + \widetilde{\omega}_a, \tag{4.2}$$

$$\nabla\lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda_\beta^a\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \widetilde{\omega}_\alpha^a, \tag{4.3}$$

$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha. \tag{4.4}$$

Ковариантные дифференциалы (4.2) компонент квазитензора λ_a, задающего нормаль 2-го рода, определяются в центропроективной связности Γ_1. Ковариантные дифференциалы (4.3) компонент квазитензора λ_α^a, задающего нормаль 1-го рода, определяются в аффинно-групповой связности Γ_2. Ковариантные дифференциалы (4.3, 4.4) компонент квазитензора $\{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, задающего плоскость Картана, определяются в групповой связности Γ. Введем линейную комбинацию ковариантных дифференциалов:

$$\Omega_\alpha = \nabla\lambda_\alpha - \lambda_a\nabla\lambda_\alpha^a. \tag{4.5}$$

В правых частях равенств (4.1) перед базисными формами стоят ковариантные производные

$$\begin{aligned} \nabla_i\lambda_a &= \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma_{ai}^b - \Gamma_{ai}, \\ \nabla_i\lambda_\alpha^a &= \lambda_{\alpha i}^a - \lambda_\alpha^b\Gamma_{bi}^a + \lambda_\beta^a\Gamma_{\alpha i}^\beta - \Gamma_{\alpha i}^a, \\ \nabla_i\lambda_\alpha &= \lambda_{\alpha i} - \lambda_\alpha^a\Gamma_{ai} + \lambda_\beta\Gamma_{\alpha i}^\beta - \Gamma_{\alpha i}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

которые удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю форм θ^i [3]:

$$\Delta\nabla_i\lambda_a \equiv 0\,,\ \Delta\nabla_i\lambda^a_\alpha \equiv 0\,,\ \Delta\nabla_i\lambda_\alpha + \nabla_i\lambda^a_\alpha\omega_a \equiv 0\,. \tag{4.7}$$

Таким образом, совокупность ковариантных производных $\{\nabla_i\lambda_a, \nabla_i\lambda^a_\alpha, \nabla_i\lambda_\alpha\}$ компонент оснащающего квазитензора λ образует тензор $\nabla\lambda$, содержащий три подтензора: $\nabla_i\lambda_a$, $\nabla_i\lambda^a_\alpha$, $\{\nabla_i\lambda^a_\alpha, \nabla_i\lambda_\alpha\}$. Из сравнений (4.7) и уравнений (3.2_1) на компоненты λ_a следует, что величины

$$T_{\alpha i} = \nabla_i\lambda_\alpha - \lambda_a\nabla_i\lambda^a_\alpha \tag{4.8}$$

также образуют тензор, который можно назвать тензором линейных комбинаций ковариантных производных объекта $\{\lambda_\alpha, \lambda^a_\alpha\}$.

Зададим три вещественных числа ξ, η, ζ. Тогда равенства

$$\nabla_i\lambda_a = \xi\, t_{ai}\,,\ \nabla_i\lambda^a_\alpha = \eta\, t^a_{\alpha i}\,,\ T_{\alpha i} = \zeta\, t_{\alpha i} \tag{4.9}$$

являются инвариантными в силу тензорного характера всех входящих в них объектов. Подставляя в эти равенства соотношения (4.6) и (4.8), получим систему линейных уравнений относительно компонент Γ_{ai}, $\Gamma^a_{\alpha i}$, $\Gamma_{\alpha i}$ объекта фундаментально-групповой связности Γ. Решая полученную систему, находим выражения этих величин через объекты плоскостной и нормальной линейных подсвязностей Γ^a_{bi}, $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda_a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ и тензор подвижности t:

$$\Gamma_{ai}(\xi) = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma^b_{ai} - \xi\, t_{ai}\,, \tag{4.10}$$

$$\Gamma^a_{\alpha i}(\eta) = \lambda^a_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi} + \lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \eta\, t^a_{\alpha i}\,, \tag{4.11}$$

$$\Gamma_{\alpha i}(\xi,\eta,\zeta) = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha\Gamma_{ai}(\xi) - \zeta t_{\alpha i} - \lambda_a\eta\, t^a_{\alpha i}\,. \tag{4.12}$$

В свою очередь компоненты тензора подвижности выражаются через объекты λ, λ' и Λ по формулам (3.5). Таким образом, объект связности Γ охватывается подобъектами Γ^a_{bi},

$\varGamma^{\alpha}_{\beta i}$, фундаментальным тензором $\varLambda$, оснащающим квазитензором λ и его пфаффовыми производными λ'. Также говорят, что связность $\varGamma$ сводится к подсвязности $\{\varGamma^{a}_{bi},\ \varGamma^{\alpha}_{\beta i}\}$ с помощью продолженного оснащения (ср. [7, с. 51]). При этом в зависимости от конкретных значений параметров ξ,η,ζ выделяется соответствующий пучок индуцированных связностей, который кратко обозначим как $\varGamma=\varGamma(\xi,\eta,\zeta)$. Параметры ξ,η,ζ назовем параметрами связки, а компоненты $\varGamma^{a}_{bi}$, $\varGamma^{\alpha}_{\beta i}$ — параметрами многопараметрических пучков. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Продолженное композиционное оснащение семейства B_r индуцирует в главном расслоении $G_s(B_r)$ трехпараметрическую связку пучков фундаментально-групповых связностей*

$$\varGamma(\xi,\eta,\zeta)=\{\varGamma^{a}_{bi},\varGamma^{\alpha}_{\beta i},\varGamma_{ai}(\xi),\varGamma^{a}_{\alpha i}(\eta),\varGamma_{\alpha i}(\xi,\eta,\zeta)\}.$$

Замечание. Если в охвате присутствуют пфаффовы производные λ' оснащающего объекта λ, то обычно, допуская вольность речи, говорят об индуцировании связности или пучка связностей с помощью оснащения.

Например, пучок связностей $\varGamma(0,0,0)$ выделяется, если потребовать, чтобы

$$\nabla_i\lambda^{a}_{\alpha}=0,\ \nabla_i\lambda_{a}=0,\ T_{\alpha i}=0.$$

Тогда

$$\varGamma_{ai}(0)=\lambda_{ai}+\lambda_b\varGamma^{b}_{ai},\ \varGamma^{a}_{\alpha i}(0)=\lambda^{a}_{\alpha i}-\lambda^{b}_{\alpha}\varGamma^{a}_{bi}+\lambda^{a}_{\beta}\varGamma^{\beta}_{\alpha i},$$

$$\varGamma_{\alpha i}(0,\ 0,\ 0)=\lambda_{\alpha i}+\lambda_{\beta}\varGamma^{\beta}_{\alpha i}-\lambda^{a}_{\alpha}\varGamma_{ai}.$$

Отметим, что компоненты тензора $\varLambda$ не присутствуют в правых частях полученных равенств.

Выделим другой пучок $\varGamma(1,1,1)$:

$$\nabla_i \lambda^a_\alpha = t^a_{\alpha i},\ \nabla_i \lambda_a = t_{ai},\ T_{\alpha i} = t_{\alpha i}.$$

Подставляя выражения (3.5) компонент тензора подвижности в формулы (4.10—4.12), получим следующие равенства для пучка $\Gamma(1,1,1)$:

$$\Gamma_{ai}(1) = \lambda_b \Gamma^b_{ai} + \Lambda^b_i \lambda_b \lambda_a + M^\alpha_{ai} \mu_\alpha,$$

$$\Gamma^a_{\alpha i}(1) = \lambda^a_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^b_\alpha \Gamma^a_{bi} + \lambda_\alpha M^a_i + \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \Lambda^\beta_{bi}, \qquad (4.13)$$

$$\Gamma_{\alpha i}(1,1,1) = \lambda_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} - \lambda^a_\alpha \Gamma_{ai} + \Lambda^\beta_{ai} \lambda^a_\alpha \lambda_\beta + \Lambda^\beta_i \lambda_\beta \lambda_\alpha.$$

Видно, что в правых частях отсутствуют пфаффовы производные λ' оснащающего квазитензора λ. Таким образом, пучки связностей $\Gamma(0,0,0)$ и $\Gamma(1,1,1)$ занимают особое место среди всего трехпараметрического семейства.

Равенства (4.10) сводят центропроективную связность $\Gamma_1 = \{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}\}$ к линейной подсвязности Γ^a_{bi}, т.е. выделяют центропроективную связку $\Gamma_1(\xi) = \{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}(\xi)\}$. Равенства (4.11) сводят аффинно-групповую связность $\Gamma_2 = \{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}\}$ к линейным подсвязностям Γ^a_{bi} и $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, т.е. выделяют аффинно-групповую связку $\Gamma_2(\eta) = \{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}(\eta)\}$.

Замечание. В работе [3] были выделены шесть пучков индуцированных фундаментально-групповых связностей:

$$\Gamma(0,0,0),\ \Gamma(0,0,1),\ \Gamma(1,0,1),$$
$$\Gamma(0,1,0),\ \Gamma(0,1,1),\ \Gamma(1,1,1).$$

Их аналоги на распределении плоскостей получены в работе [6].

§ 5. Индуцированные связности

Из связки пучков $\Gamma = \Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ можно выделить связку индуцированных связностей $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta)$ при помощи подстановки в формулы (4.10—4.12) следующих охватов компонент Γ^a_{bi} и $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ [8]:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{a}_{bi} = \Lambda^{\alpha}_{bi}\lambda^{a}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}\Lambda^{\alpha}_{i}\lambda_{\alpha} - M^{c}_{i}(\delta^{a}_{b}\lambda_{c} + \delta^{a}_{c}\lambda_{b}), \tag{5.1}$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i} = -\Lambda^{\alpha}_{ai}\lambda^{a}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{i}\lambda_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}(M^{a}_{i}\lambda_{a} + \Lambda^{\gamma}_{i}\lambda_{\gamma}). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Продолженное композиционное оснащение семейства B_r индуцирует в главном расслоении $G_s(B_r)$ трехпараметрическую связку фундаментально-групповых связностей.*

В общем случае формулы охватов для компонент объектов этих связностей будут содержать:

1) компоненты фундаментального тензора Λ;

2) компоненты оснащающего квазитензора λ;

3) пфаффовы производные λ'.

Значит, связность индуцируется продолженным композиционным оснащением семейства B_r. При этом в формулах охватов (4.10—4.12, 5.1, 5.2) для связности $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$ пфаффовы производные λ' отсутствуют. Таким образом, эта связность особенна тем, что индуцирована самим композиционным оснащением без привлечения продолженного оснащающего объекта.

Замечание. Выражения для компонент объектов связности $\overset{0}{\Gamma}(0,0,0)$ и $\overset{0}{\Gamma}(1,1,1)$ впервые были получены в работах [3] и [8].

Из равенств (4.6) и таблицы (с. 64) вытекают следующие теоремы:

Теорема 5.2. *Смещение нормали 2-го рода N_{m-1} в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} влечет совпадение следующих связностей и связок связностей:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1(\xi_1) = \overset{0}{\Gamma}_1(\xi_2),\ \overset{0}{\Gamma}(\xi_1,\eta,\zeta) = \overset{0}{\Gamma}(\xi_2,\eta,\zeta),$$
$$\xi_1 \neq \xi_2,\ \forall\, \eta,\zeta .$$

Теорема 5.3. *Смещение плоскости Картана* C_{n-m-1} *в нормали 1-го рода* N_{n-m} *влечет совпадение следующих связностей и связок связностей*:

$$\overset{0}{\Gamma}_2(\eta_1) = \overset{0}{\Gamma}_2(\eta_2),\ \overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta_1,\zeta) = \overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta_2,\zeta),$$
$$\eta_1 \neq \eta_2,\ \forall\, \xi, \zeta .$$

Теорема 5.4. *Для совпадения двух связностей (связок связностей) вида* $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta_1)$ *и* $\overset{0}{\Gamma}(\xi,\eta,\zeta_2)$, *где* $\zeta_1 \neq \zeta_2$, *а* ξ *и* η *— любые числа, достаточно смещения плоскости Картана* C_{n-m-1} *в гиперплоскости Бортолотти* P_{n-1}.

Эти теоремы позволяют находить достаточные условия совпадения любых двух заданных связностей из трехпараметрической связки.

§ 6. Геометрическая интерпретация плоскостной и нормальной линейных подсвязностей при помощи центральных проектирований

Внесем формы связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a_b = \omega^a_b - \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}\,\theta^i$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}\,\theta^i$ в формулы (3.4, 3.5):

$$dB_a = (\theta - \omega^c\lambda_c - \omega^\beta\mu_\beta)B_a + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a\, B_b + (M^\alpha_{ai}B_\alpha + t_{ai}A)\theta^i,$$

$$dB_\alpha = (\theta - \omega^c\lambda_c - \omega^\beta\mu_\beta)B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha\, B_\beta + (t^a_{\alpha i}B_a + t_{\alpha i}A)\theta^i,$$

откуда следуют теоремы (ср. [7, с. 105]):

Теорема 6.1. *Индуцированная плоскостная линейная связность* $\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}$ *характеризуется проекцией на нормаль 2-го рода* N_{m-1} *смежной с ней нормали* $N_{m-1} + dN_{m-1}$ *из центра — нормали 1-го рода* N_{n-m}:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} : N_{m-1} + dN_{m-1} \xrightarrow{N_{n-m}} N_{m-1}.$$

Теорема 6.2. *Индуцированная нормальная линейная связность* $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i}$ *интерпретируется проекцией на плоскость Картана* C_{n-m-1} *смежной с ней плоскости* $C_{n-m-1}+dC_{n-m-1}$ *из центра — плоскости* L_m*:*

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta i} : C_{n-m-1}+dC_{n-m-1} \xrightarrow{L_m} C_{n-m-1}.$$

§ 7. Тензор параллелизма

Найдем внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов (4.2—4.4):

$$D\nabla\lambda_a = -\nabla\lambda_b \wedge \tilde{\omega}^b_a + T_{aij}\theta^i \wedge \theta^j, \tag{7.1}$$

$$D\nabla\lambda^a_\alpha = -\nabla\lambda^a_\beta \wedge \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \nabla\lambda^b_\alpha \wedge \tilde{\omega}^a_b + T^a_{\alpha ij}\theta^i \wedge \theta^j, \tag{7.2}$$

$$D\nabla\lambda_\alpha = -\nabla\lambda_\beta \wedge \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \nabla\lambda^a_\alpha \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{T}_{\alpha ij}\theta^i \wedge \theta^j, \tag{7.3}$$

$$D\Omega_\alpha = -\Omega_\beta \wedge \tilde{\omega}^\beta_\alpha + T_{\alpha ij}\theta^i \wedge \theta^j, \tag{7.4}$$

где

$$T_{aij} = R_{aij} - \lambda_b R^b_{aij}, \tag{7.5}$$

$$T^a_{\alpha ij} = R^a_{\alpha ij} - \lambda^a_\beta R^\beta_{\alpha ij} + \lambda^b_\alpha R^a_{bij}, \tag{7.6}$$

$$\tilde{T}_{\alpha ij} = R_{\alpha ij} - \lambda_\beta R^\beta_{\alpha ij} + \lambda^a_\alpha R_{aij}, \tag{7.7}$$

$$T_{\alpha ij} = \tilde{T}_{\alpha ij} - \lambda_a T^a_{\alpha ij} + \nabla_{[i}\lambda^a_\alpha \nabla_{j]}\lambda_a. \tag{7.8}$$

Эти величины удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta T_{aij} \equiv 0, \; \Delta T^a_{\alpha ij} \equiv 0, \; \Delta\tilde{T}_{\alpha ij} + T^a_{\alpha ij}\omega_a \equiv 0, \; \Delta T_{\alpha ij} \equiv 0.$$

Совокупность величин $T = \{T_{aij}, T^a_{\alpha ij}, T_{\alpha ij}\}$ образует тензор, называемый тензором параллелизма (ср. [7, с. 95]). Он содержит три простейших подтензора:

$$\{T_{aij}\}, \; \{T^a_{\alpha ij}\}, \; \{T_{\alpha ij}\}.$$

Расширенным тензором параллелизма будем называть тензор $T = \{T_{aij}, T^a_{\alpha ij}, T_{\alpha ij}, \tilde{T}_{\alpha ij}\}$. Он содержит один простой подтензор:

$$\{T^a_{\alpha ij}, \widetilde{T}_{\alpha ij}\}.$$

Линия ρ на пространстве параметров V_r определяет однопараметрическое подсемейство семейства B_r и задается вполне интегрируемой системой уравнений

$$\theta^i = \rho^i \omega, \tag{7.9}$$

где форма ω удовлетворяет структурному уравнению $D\omega = \omega \wedge \vartheta$. Величины ρ^i удовлетворяют уравнениям

$$d\rho^i + \rho^j \theta^i_j - \rho^i \vartheta = \rho^i_1 \omega,$$

и образуют геометрический объект, определяющий касательный вектор линии $\rho \subset V_r$ в образующей точке пространства параметров V_r.

Из (7.1—7.4) заключаем, что четыре системы уравнений:

$$\nabla \lambda_a \Big|_\rho = 0; \tag{7.10}$$

$$\nabla \lambda^a_\alpha \Big|_\rho = 0; \tag{7.11}$$

$$\nabla \lambda^a_\alpha \Big|_\rho = 0, \ \nabla \lambda_\alpha \Big|_\rho = 0; \tag{7.12}$$

$$\Omega_\alpha \Big|_\rho = 0 \tag{7.13}$$

— интегрируемы.

Замечание. Уравнения (7.12) равносильны (7.10, 7.12).

§ 8. Интерпретация индуцированных центропроективных связностей при помощи параллельных перенесений нормали 2-го рода

Аналог нормали 2-го рода Нордена N_{m-1} задается квазитензором λ_a. Параллельное перенесение данной плоскости в связке центропроективных связностей $\Gamma_1(\xi)$ задается вполне интегрируемой системой вдоль линии $\rho \subset V_r$ (ср. [7, с. 102]):

$$\nabla\lambda_a(\xi)\Big|_\rho = 0\,, \tag{8.1}$$

где $\nabla\lambda_a(\xi)$ — ковариантные дифференциалы компонент λ_a в связке $\Gamma_1(\xi)$. Они выражаются через компоненты t_{ai} тензора подвижности и типовой параметр ξ связки по следующей формуле:

$$\nabla\lambda_a(\xi) = \xi t_{ai}\theta^i\,. \tag{8.2}$$

8.1. Параллельное перенесение нормали 2-го рода N_{m-1} в пучке связностей

Для пучка связностей $\Gamma_1(0)$ значение типового параметра ξ равно нулю: $\xi = 0$, поэтому из (8.2) получим

$$\nabla\lambda_a(0) = 0\,. \tag{8.3}$$

Таким образом, вдоль любой линии ρ система (8.1) выполняется тождественно.

Определение 8.1. *Свободно вырожденным параллельным перенесением нормали 2-го рода N_{m-1} в пучке центропроективных связностей $\Gamma_1(0)$ называется ее произвольное смещение.*

Поскольку введенное параллельное перенесение не накладывает никаких ограничений на смещение нормали N_{m-1}, справедлива

Теорема 8.1. *Свободно вырожденное параллельное перенесение нормали N_{m-1} в пучке $\Gamma_1(0)$ существует вдоль любой линии ρ.*

8.2. Параллельное перенесение нормали N_{m-1} в связке связностей

Для связки связностей $\Gamma_1(\xi)$, $\xi \neq 0$ можно выразить линейные комбинации $t_{ai}\theta^i$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda_a(\xi)$, разделив равенства (8.2) на число ξ:

$$t_{ai}\theta^i = \frac{1}{\xi}\nabla\lambda_a(\xi)\,. \qquad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в (3.4), получим:

$$dB_a = \theta B_a + (\omega_a^b + \lambda_a\omega^b)B_b + M_{ai}^{\alpha}\theta^i B_\alpha + \frac{1}{\xi}\nabla\lambda_a(\xi)A\,. \quad (8.5)$$

Формула (8.5) позволяет дать

Определение 8.2. *Параллельным перенесением нормали 2-го рода* N_{m-1} *в связке центропроективных связностей* $\Gamma_1(\xi)$, $\xi \neq 0$, *называется ее смещение в гиперплоскости Бортолотти* P_{n-1}.

Выясним условия существования введенного параллельного перенесения. Подставляя (8.2) в (8.1) с учетом (7.9) и $\xi \neq 0$, получим однородную систему m уравнений относительно r переменных ρ^i:

$$t_{ai}\rho^i = 0\,. \qquad (8.6)$$

Обозначим $R_1 = rank(t_{ai})$, где (t_{ai}) — матрица размера $m \times r$, составленная из компонент тензора t_{ai}, причем индекс a нумерует строчки, а индекс i — столбцы. Возможны следующие случаи.

1. $R_1 < r$, тогда система (8.6) имеет нетривиальные решения и параллельное перенесение нормали N_{m-1} существует вдоль линий, соответствующих этим решениям; при этом в касательном пространстве T_r выделяется подпространство параллельности Π_{r-R_1}, состоящее из всех касательных векторов ко всем линиям $\rho \subset V_r$, вдоль которых параллельное перенесение существует.

2. $R_1 = r$, тогда система (8.6) нетривиальных решений не имеет и соответствующего параллельного перенесения нормали N_{m-1} не существует.

Теорема 8.2. *Параллельное перенесение нормали* N_{m-1} *в связке связностей* $\Gamma_1(\xi)$, $\xi \neq 0$, *существует лишь при условии, что ранг матрицы* (t_{ai}) *меньше размерности семейства* B_r, *при этом линии* $\rho \subset V_r$, *вдоль которых данное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений* (8.6).

В общем случае матрица (t_{ai}) имеет максимальный ранг $R_1 = min\{m,r\}$. При этом:

1) если $r > m$, то $R_1 = m$, параллельное перенесение нормали N_{m-1} существует и подпространство параллельности имеет размерность $r - m$;

2) если $r \leq m$, то $R_1 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельное перенесение существовать не будет.

§ 9. Интерпретация индуцированных аффинно-групповых связностей при помощи параллельных перенесений нормали 1-го рода Нордена

Аналог нормали 1-го рода Нордена N_{n-m} задается квазитензором λ_α^a. Параллельное перенесение данной плоскости в связке аффинно-групповых связностей $\Gamma_2(\eta)$ задается интегрируемой системой вдоль линии $\rho \subset V_r$:

$$\nabla \lambda_\alpha^a(\eta)\Big|_\rho = 0, \tag{9.1}$$

где $\nabla \lambda_\alpha^a(\eta)$ — ковариантные дифференциалы компонент λ_α^a в связке $\Gamma_2(\eta)$. Они выражаются через компоненты $t_{\alpha i}^a$ тензора подвижности и типовой параметр η связки по следующим формулам:

$$\nabla \lambda_\alpha^a(\eta) = \eta t_{\alpha i}^a \theta^i . \tag{9.2}$$

9.1. Параллельное перенесение нормали 1-го рода в пучке связностей

Для пучка связностей $\Gamma_2(0)$ из (9.2) получим

$$\nabla\lambda_\alpha^a(0) = 0 . \qquad (9.3)$$

Таким образом, вдоль любой линии ρ система (9.1) обращается в тождество.

Определение 9.1. *Свободно вырожденным параллельным перенесением нормали 1-го рода* N_{n-m} *в пучке аффинно-групповых связностей* $\Gamma_2(0)$ *называется ее произвольное смещение.*

Поскольку введенное параллельное перенесение не накладывает никаких ограничений на смещение нормали N_{n-m}, справедлива

Теорема 9.1. *Свободно вырожденное параллельное перенесение нормали* N_{n-m} *в пучке* $\Gamma_2(0)$ *существует вдоль любой линии* ρ.

9.2. Параллельное перенесение нормали N_{n-m} в связке связностей

Для связки связностей $\Gamma_2(\eta)$, $\eta \neq 0$ можно выразить линейные комбинации $t_{\alpha i}^a\theta^i$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda_\alpha^a(\eta)$:

$$t_{\alpha i}^a\theta^i = \frac{1}{\eta}\nabla\lambda_\alpha^a(\eta) . \qquad (9.4)$$

Подставляя (9.4) в (3.5), получим:

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)_\alpha^\beta B_\beta + \frac{1}{\eta}\nabla_i\lambda_\alpha^a B_a + t_{\alpha i}\theta^i A . \qquad (9.5)$$

Формула (9.5) позволяет дать

Определение 9.2. *Параллельным перенесением нормали* N_{n-m} *в пучке аффинно-групповых связностей* $\Gamma_2(\eta)$, $\eta \neq 0$, *называется такое ее смещение, при котором плоскость Картана* C_{n-m-1} *является фокальной плоскостью этой нормали.*

Выясним условия существования введенного параллельного перенесения. Подставляя (9.2) в (9.1) с учетом (7.9) и $\eta \neq 0$, получим однородную систему $m(n-m)$ уравнений относительно r переменных ρ^i:

$$t^a_{\alpha i}\rho^i = 0. \tag{9.6}$$

Обозначим $R_2 = rank(t^a_{\alpha i})$, где $(t^a_{\alpha i})$ — матрица размера $m(n-m)\times r$, составленная из компонент тензора $t^a_{\alpha i}$. Возможны следующие случаи.

1. $R_2 < r$, тогда система (9.6) имеет нетривиальные решения и параллельное перенесение нормали N_{n-m} существует вдоль линий, соответствующих этим решениям; при этом в касательном пространстве T_r выделяется подпространство параллельности Π_{r-R_2}, состоящее из всех касательных векторов ко всем линиям $\rho \subset V_r$, вдоль которых параллельное перенесение существует.

2. $R_2 = r$, тогда система (9.6) нетривиальных решений не имеет и соответствующего параллельного перенесения нормали N_{n-m} не существует.

Теорема 9.2. *Параллельное перенесение нормали* N_{n-m} *в связке связностей* $\Gamma_2(\eta)$, $\eta \neq 0$, *существует лишь при условии, что ранг матрицы* $(t^a_{\alpha i})$ *меньше* r, *при этом линии* $\rho \subset V_r$, *вдоль которых данное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений* (9.6).

В общем случае матрица $(t^a_{\alpha i})$ имеет максимальный ранг $R_2 = min\{m(n-m), r\}$. При этом:

1) если $r > m(n-m)$, то $R_2 = m(n-m)$ и параллельное перенесение нормали N_{n-m} существует, причем подпространство параллельности имеет размерность $r - m(n-m)$;

2) если $r \le m(n-m)$, то $R_2 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельного перенесения не существует.

Замечание. В работе [7] рассмотрено параллельное перенесение плоскости Картана в аффинно-групповой связности.

§ 10. Параллельное перенесение плоскости Картана в линейной комбинации связки фундаментально-групповых связностей

Параллельное перенесение плоскости Картана в линейной комбинации $\breve{\Gamma}(\zeta)$ связки $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ пучков фундаментально-групповых связностей задается вполне интегрируемой системой вдоль линии $\rho \subset V_r$ (ср. [7, с. 103]):

$$\Omega_\alpha(\zeta)\Big|_\rho = 0, \tag{10.1}$$

где

$$\Omega_\alpha(\zeta) = \nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) - \lambda_a \nabla\lambda_\alpha^a(\eta) = \zeta t_{\alpha i}\theta^i \tag{10.2}$$

— линейные комбинации ковариантных дифференциалов в связке $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$.

Замечание. Линейная комбинация $\breve{\Gamma}(\zeta)$ связки связностей $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ вводится для описания параллельного перенесения, задаваемого системой уравнений (10.1). В обозначении $\breve{\Gamma}(\zeta)$ в скобках указан параметр ζ связки, поскольку рассматриваемое параллельное перенесение фактически зависит только от него. Параллельное перенесение фигуры в линейной комбинации связности введено в работе [9].

10.1. Параллельное перенесение плоскости $C_{n\text{-}m\text{-}1}$ в линейной комбинации пучка $\breve{\Gamma}(0)$

Для пучка связностей $\breve{\Gamma}(0)$ из (10.2) получим

$$\Omega_{\alpha}(0)=0. \tag{10.3}$$

Таким образом, вдоль любой линии ρ система (7.1) выполняется тождественно.

Определение 10.1. *Свободно вырожденным параллельным перенесением плоскости Картана C_{n-m-1} в линейной комбинации пучка $\breve{\Gamma}(0)$ подсвязки $\Gamma(\xi,\eta,0)$ называется ее произвольное смещение.*

Поскольку введенное параллельное перенесение не накладывает никаких ограничений на смещение плоскости C_{n-m-1}, справедлива

Теорема 10.1. *Свободно вырожденное параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} в линейной комбинации пучка $\breve{\Gamma}(0)$ подсвязки $\Gamma(\xi,\eta,0)$ существует вдоль любой линии ρ.*

10.2. Параллельное перенесение плоскости Картана $C_{n\text{-}m\text{-}1}$ в линейной комбинации связки $\breve{\Gamma}(\zeta)$

Для линейной комбинации $\breve{\Gamma}(\zeta)$, $\zeta \neq 0$ можно выразить линейные комбинации $t_{\alpha i}\theta^{i}$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda_{\alpha}^{a}(\eta)$ и $\nabla\lambda_{\alpha}(\eta,\zeta)$, используя равенства (10.2):

$$t_{\alpha i}\theta^{i}=\frac{1}{\zeta}\Big(\nabla\lambda_{\alpha}(\eta,\zeta)-\lambda_{a}\nabla\lambda_{\alpha}^{a}(\eta)\Big). \tag{10.4}$$

Подставляя (10.4) в (3.5), получим:

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)_\alpha^\beta B_\beta + t_{\alpha i}^a \theta^i B_a + \\ + \frac{1}{\zeta}\Big(\nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) - \lambda_a \nabla\lambda_\alpha^a(\eta)\Big)A. \tag{10.5}$$

Формула (10.5) позволяет дать

Определение 10.2. *Параллельным перенесением плоскости Картана* C_{n-m-1} *в линейной комбинации* $\breve{\Gamma}(\zeta)$, $\zeta \neq 0$, *связки* $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ *называется ее смещение в гиперплоскости Бортолотти* P_{n-1}.

Выясним условия существования введенного параллельного перенесения. Подставляя (10.2) в (10.1) с учетом (7.9) и $\zeta \neq 0$, получим однородную систему $n-m$ уравнений относительно r переменных ρ^i:

$$t_{\alpha i}\rho^i = 0. \tag{10.6}$$

Обозначим $R_3 = rank(t_{\alpha i})$, где $(t_{\alpha i})$ — матрица размера $(n-m)\times r$, составленная из компонент тензора $t_{\alpha i}$. Возможны следующие случаи.

1. $R_3 < r$, тогда система (10.6) имеет нетривиальные решения и параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует вдоль линий, соответствующих этим решениям; при этом в касательном пространстве T_r выделяется подпространство параллельности Π_{r-R_3}.

2. $R_3 = r$, тогда система (10.6) нетривиальных решений не имеет и соответствующего параллельного перенесения плоскости C_{n-m-1} не существует.

Теорема 10.2. *Параллельное перенесение плоскости* C_{n-m-1} *в линейной комбинации* $\breve{\Gamma}(\zeta)$, $\zeta \neq 0$, *связки* $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ *существует лишь при условии, что ранг матрицы* $(t_{\alpha i})$ *меньше* r, *при этом линии* $\rho \subset V_r$, *вдоль которых дан-*

ное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений (10.6).

В общем случае матрица $(t_{\alpha i})$ имеет максимальный ранг $R_3 = min\{n-m, r\}$. При этом:

1) если $r > n-m$, то $R_3 = n-m$, параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует, и подпространство параллельности имеет размерность $r-n+m$;

2) если $r \le n-m$, то $R_3 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельного перенесения не существует.

§ 11. Параллельное перенесение плоскости Картана в фундаментально-групповой связности

Параллельное перенесение плоскости Картана в связке $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$ фундаментально-групповых связностей по определению задается вполне интегрируемой системой вдоль линии $\rho \subset V_r$ (ср. [7, с. 103]):

$$\nabla\lambda^a_\alpha(\eta)\Big|_\rho = 0,\ \nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta)\Big|_\rho = 0; \qquad (11.1)$$

где

$$\nabla\lambda^a_\alpha(\eta) = \eta t^a_{\alpha i}\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) = (\zeta t_{\alpha i} + \lambda_a \eta t^a_{\alpha i})\theta^i. \qquad (11.2)$$

11.1. Параллельное перенесение плоскости Картана C_{n-m-1} в связке $\Gamma(\xi,0,0)$

Для подсвязки связностей $\Gamma(\xi,0,0)$ из (8.2) получим

$$\nabla\lambda^a_\alpha(0) = 0,\ \nabla\lambda_\alpha(0,0) = 0. \qquad (11.3)$$

Таким образом, вдоль любой линии ρ система (11.1) обращается в тождество.

Определение 11.1. *Свободно вырожденным параллельным перенесением плоскости Картана C_{n-m-1} в связке фундаментально-групповых связностей вида $\Gamma(\xi,0,0)$ называется ее произвольное смещение.*

Поскольку введенное параллельное перенесение не накладывает никаких ограничений на смещение плоскости C_{n-m-1}, справедлива

Теорема 11.1. *Свободно вырожденное параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} в связке связностей $\Gamma(\xi,0,0)$ существует вдоль любой линии ρ.*

11.2. Параллельное перенесение плоскости Картана C_{n-m-1} в связке $\Gamma(\xi,\eta,0)$, $\eta \neq 0$

Для связки связностей $\Gamma(\xi,\eta,0)$, $\eta \neq 0$, из (11.2) получим:

$$\nabla\lambda^a_\alpha(\eta) = \eta t^a_{\alpha i}\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha(\eta,0) = \lambda_a \eta t^a_{\alpha i}\theta^i. \qquad (11.4)$$

Выразим линейные комбинации $t_{\alpha i}\theta^i$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda^a_\alpha(\eta)$, используя полученные равенства (11.4):

$$t^a_{\alpha i}\theta^i = \frac{1}{\eta}\nabla\lambda^a_\alpha(\eta). \qquad (11.5)$$

Подставляя (11.5) в (3.5), получим:

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + \left(\frac{1}{\eta}\nabla_i\lambda^a_\alpha(\eta)B_a + t_{\alpha i}A\right)\theta^i. \qquad (11.6)$$

Формула (11.6) позволяет дать

Определение 11.2. *Параллельным перенесением плоскости Картана C_{n-m-1} в подсвязке $\Gamma(\xi,\eta,0)$, $\eta \neq 0$, называется ее смещение в нормали 1-го рода N_{n-m}.*

Условия существования введенного параллельного перенесения такие же, как в пункте 6.2. Действительно, подставляя (11.4) в (11.1), получим систему уравнений

$$\eta t^a_{\alpha i}\rho^i = 0\,,\ \lambda_a \eta t^a_{\alpha i}\rho^i = 0\,, \tag{11.7}$$

равносильную (9.6) в силу $\eta \neq 0$. Тогда справедлива

Теорема 11.2. *Параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} в подсвязке $\Gamma(\xi,\eta,0)$, $\eta \neq 0$, существует лишь при условии, что ранг матрицы $(t^a_{\alpha i})$ меньше r, при этом линии $\rho \subset V_r$, вдоль которых данное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений* (9.6).

В общем случае матрица $(t^a_{\alpha i})$ имеет максимальный ранг $R_2 = min\{m(n-m),r\}$. При этом:

1) если $r > m(n-m)$, то $R_2 = m(n-m)$, параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует и подпространство параллельности имеет размерность $r - m(n-m)$;

2) если $r \leq m(n-m)$, то $R_2 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельного перенесения не существует.

11.3. Параллельное перенесение плоскости Картана $C_{n\text{-}m\text{-}1}$ в подсвязке $\Gamma(\xi,0,\zeta)$, $\zeta \neq 0$

Для пучка связностей вида $\Gamma(\xi,0,\zeta)$, $\zeta \neq 0$ из (11.2) получим:

$$\nabla\lambda^a_\alpha(\eta) = 0\,,\ \nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) = \zeta t_{\alpha i}\theta^i\,. \tag{11.8}$$

Тогда

$$t_{\alpha i}\theta^i = \frac{1}{\zeta}\nabla\lambda_\alpha(0,\zeta)\,,$$

что при подстановке в (3.5) дает

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + t^a_{\alpha i}\theta^i B_a + \frac{1}{\zeta}\nabla\lambda_\alpha(0,\zeta)A. \qquad (11.9)$$

Формула (12.8) позволяет дать

Определение 11.3. *Параллельным перенесением плоскости Картана* C_{n-m-1} *в пучке* $\Gamma(\xi,0,\zeta)$, $\zeta \neq 0$, *называется ее смещение в гиперплоскости Бортолотти* P_{n-1}.

Условия существования введенного параллельного перенесения такие же, как в пункте 7.2. Действительно, подставляя (11.8) в (11.1), получим систему

$$\zeta t_{\alpha i}\rho^i = 0,$$

которая с учетом $\zeta \neq 0$ равносильна (10.6). Тогда справедлива

Теорема 11.3. *Параллельное перенесение плоскости* C_{n-m-1} *в связке* $\Gamma(\xi,0,\zeta)$, $\zeta \neq 0$, *существует лишь при условии, что ранг матрицы* $(t_{\alpha i})$ *меньше* r, *при этом линии* $\rho \subset V_r$, *вдоль которых данное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений* (10.6).

В общем случае матрица $(t_{\alpha i})$ имеет максимальный ранг $R_3 = min\{n-m, r\}$. При этом:

1) если $r > n-m$, то $R_3 = n-m$ и параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует, причем подпространство параллельности имеет размерность $r-n+m$;

2) если $r \leq n-m$, то $R_3 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельного перенесения не существует.

11.4. Параллельное перенесение плоскости Картана C_{n-m-1} *в связке* $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$

Для связки связностей $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$ из (11.2) получим:

$$t^a_{\alpha i}\theta^i = \frac{1}{\eta}\nabla\lambda^a_\alpha(\eta),\ t_{\alpha i}\theta^i = \frac{1}{\zeta}\Big(\nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) - \lambda_a\nabla\lambda^a_\alpha(\eta)\Big).$$

Подставляя в (3.5), будем иметь

$$\begin{gathered} dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + \frac{1}{\eta}\nabla\lambda^a_\alpha(\eta)B_a + \\ + \frac{1}{\zeta}\Big(\nabla\lambda_\alpha(\eta,\zeta) - \lambda_a\nabla\lambda^a_\alpha(\eta)\Big)A. \end{gathered} \tag{11.10}$$

Формула (11.10) позволяет дать

Определение 11.4. *Связанно вырожденным параллельным перенесением плоскости Картана* C_{n-m-1} *в связке* $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$ *называется ее неподвижность.*

Выясним условия существования введенного параллельного перенесения. Подставляя (11.2) в (11.1) с учетом (7.9) и $\zeta \neq 0$, получим однородную систему $n-m$ уравнений относительно r переменных ρ^i:

$$t_{\alpha i}\rho^i = 0,\ t^a_{\alpha i}\rho^i = 0. \tag{11.11}$$

Обозначим $R_4 = rank M$, где M — матрица системы (11.11). Эта матрица имеет размер $(m+1)(n-m)\times r$, причем в ней первые $n-m$ строк занимает матрица $(t_{\alpha i})$, а остальные $m(n-m)$ строк — матрица $(t^a_{\alpha i})$. Возможны следующие случаи

1. $R_4 < r$, тогда система (11.11) имеет нетривиальные решения и связанно вырожденное параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует вдоль линий, соответствующих этим решениям; при этом в касательном пространстве T_r выделяется подпространство параллельности Π_{r-R_4}.

2. $R_4 = r$, тогда система (11.11) нетривиальных решений не имеет и соответствующего параллельного перенесения плоскости C_{n-m-1} не существует.

Теорема 11.4. *Связанно вырожденное параллельное перенесение плоскости* C_{n-m-1} *в связке* $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$, $\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$, *существует лишь при условии, что ранг матрицы* M *меньше* r, *при этом линии* $\rho \subset V_r$, *вдоль которых данное параллельное перенесение существует, определяются из системы уравнений* (11.11).

В общем случае матрица M имеет максимальный ранг $R_4 = min\{(m+1)(n-m), r\}$. При этом:

1) если $r > (m+1)(n-m)$, то $R_4 = (m+1)(n-m)$ и параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} существует, причем подпространство параллельности имеет размерность $r-(m+1)(n-m)$;

2) если $r \leq (m+1)(n-m)$, то $R_1 = r$ и подпространство параллельности является нулевым, поэтому параллельного перенесения не существует.

Замечание. Теоремы, сформулированные в настоящей работе, обобщают соответствующие результаты, полученные в [7] для случая поверхности в проективном пространстве.

Список литературы

1. *Бондаренко Е. В.* Связности на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 31. Калининград, 2000. С. 12—16.

2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

3. *Кулешов А. В.* Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С. 72—84.

4. *Кулешов А. В.* О совпадении и интерпретации связностей, индуцированных на семействе центрированных плоскостей // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2009. Вып. 10. С. 112—119.

5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. *Омельян О. М.* Классификация пучков связностей, индуцированных композиционным оснащением распределения плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 119—127.

7. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

8. *Шевченко Ю. И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 9. Калининград, 1978. С. 124—133.

9. *Шевченко Ю. И.* Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Там же. 1987. Вып. 18. С. 115—120.

10. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

A. Kuleshov

CONNECTIONS, INDUCED BY COMPOSITE CLOTHING OF A FAMILY OF CENTERED PLANES IN PROJECTIVE SPACE

This paper is dealing with connections on a smooth family of centered planes in projective space. It is shown that composite clothing of such a family induces three-parameter bunch of bundles of fundamental-group connections. One induced connection is allocated from each of this bundles. Coincidence conditions of the received connections and geometrical interpretation of them by means of parallel transport and central projections are given.