ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

И.И.Цыганок

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В n-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теория векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве является классическим разделом дифференциальной геометрии. Аффинная же теория векторных полей является менее изученной. Исследованию векторных полей в трехмерном аффинном пространстве посвящены статьи [1] и [2]. В настоящей работе ставится задача изучения аффинной геометрии векторных полей многомерного пространства. При ее решении существенную роль будет играть тензор типа (1,1), порождаемый векторным полем.

1. Рассмотрим аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, инфинитезимальные перемещения которого описываются уравнениями вида:

$$dx = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, n),$$

где формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют следующим уравнениям структуры: $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i$.

Пусть в некоторой области пространства A_n задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x) = a^i \vec{e}_i$. Тогда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$da^i + a^\ell \omega_\ell^i = a_j^i \omega^j. \quad (1)$$

При их продолжении получаем

$$da_j^i - a_k^i \omega_j^k + a_j^k \omega_k^i = a_{jk}^i \omega^k \quad (a_{jk}^i = a_{kj}^i). \quad (2)$$

Система величин $A = (a_j^i)$ образует тензор типа (1,1), с его помощью вычисляется дифференциал векторного поля $\vec{a}$ в направлении, определенном вектором $\vec{\xi}$: $d_{\vec{\xi}}\vec{a} = (a_j^i \xi^j \vec{e}_i)\theta$, где $\omega^i = \xi^i \theta$ и $D\theta = \theta \wedge \theta_1$. Учитывая, что тензор A задает линейное преобразование векторного пространства $T_x(A_n)$, равенству можно придать вид:

$$\nabla_{\vec{\xi}} \vec{a} = A(\vec{\xi}). \quad (3)$$

Различные векторные поля могут порождать один и тот же тензор A. Пусть $\vec{b}$ является одним из таких векторных полей, т.е.

$$\nabla_{\vec{\xi}} \vec{b} = A(\vec{\xi}). \quad (3^1)$$

Вычитая равенство (3) из (3^1), получим

$$\nabla_{\vec{\xi}} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0},$$

следовательно, $(\vec{b} - \vec{a})$-постоянный вектор.

2. Найдем такие направления в точке x, вдоль которой дифференциал вектора $\vec{a}(x)$ коллинеарен направлению смещения точки, т.е. $d\vec{a} = \lambda d\vec{x}$.
Это равенство назовем уравнением Родрига векторного поля $\vec{a}$. В силу (3) оно приводит к алгебраическому уравнению степени n: $\det \|A - \lambda E\| = 0$, корни которого назовем главными кривизнами, а направления, им соответствующие, - главными направлениями векторного поля $\vec{a}$. Таким образом, главные кривизны векторного поля $\vec{a}$ -это собственные значения тензора A, а главные направления - его собственные направления. Величины $H = \operatorname{tr} A$, $K = \det A$ назовем соответственно средней и полной кривизной векторного поля. При этом $\operatorname{tr} A = \operatorname{div} \vec{a} = \sum a_i^i$, а потому обращение в нуль выделяет соленоидальные векторные поля $\vec{a}$ [2].

Если же в некоторой области пространства $K = 0$, то $\operatorname{rang} A = r < n$, и существует ядро линейного преобразования, определяемого тензором A, причем $\dim(\ker A) = n - r$. Если $\vec{\xi} \in \ker A$, то $\nabla_{\vec{\xi}} \vec{a} = A(\vec{\xi}) = \vec{0}$ и векторное поле $\vec{a}$ будет постоянным вдоль ядра линейного преобразования, образующего $(n-r)$-мерное подпространство векторного пространства $T_x(A_n)$. Таким образом, в области пространства A_n определяется распределение $\Delta(\Delta_{n-r}(x) = (\ker A)_x)$ с постоянным вдоль каждого своего плоского элемента $\Delta_{n-r}(x)$ векторным полем $\vec{a}$. Можно доказать, что это распределение будет голономным.

3. Предположим, что векторное поле $\vec{a}$ имеет n различных главных кривизн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Если при этом векторы подвижного репера совместить с главными направ-

лениями тензора A, этот тензор приведется к виду $a^i_j=\lambda_j\delta^i_j$. Линии, касающиеся в каждой своей точке главных направлений тензора A, образуют сеть Σ_n в области задания векторного поля $\vec{a}$. Назовем ее сетью линий кривизны векторного поля. Из уравнений (2) при этом следует, что

$$d\lambda_i = a^i_{ik}\,\omega^k, \quad \omega^i_j=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\,a^i_{jk}\,\omega^k \ (i\neq j). \qquad (4)$$

Вторая группа уравнений и задает сеть Σ_n. Условие голономности сети Σ_n записывается в виде $(\lambda_i-\lambda_k)a^i_{jk}=(\lambda_i-\lambda_j)a^i_{kj}$ $(i\neq j\neq k\neq i)$. Отсюда в силу (2) следуют соотношения $a^i_{jk}=0$ $(i\neq j\neq k\neq i)$, которые показывают, что эта сеть является n-сопряженной системой [3].

Поскольку теперь $d\vec{a}=\sum\lambda_i\omega^i\vec{e}_i$, то вдоль каждой своей линии кривизны векторное поле описывает развертывающуюся поверхность, и через каждую точку x пространства A_n проходит n таких поверхностей.

В случае, если все $\lambda_i=const$, то из первой группы уравнений (4) последуют равенства $a^i_{ik}=0$ при $i\neq k$ и сеть Σ_n линий кривизны векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x)$ является сетью Чебышева II рода [4].

Потребуем теперь, чтобы τ первых кривизн векторного поля совпадали: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\tau=\lambda$, а остальные $(n-\tau)$ были различны между собой. В этом случае $a^s_t=\lambda\delta^s_t$ $(s,t=1,2,\ldots,\tau)$, поэтому из уравнений (4) последуют равенства: $a^s_{t\alpha}=\delta^s_t a_\alpha$ $(\alpha,\beta=\tau+1,\tau+2,\ldots,n)$.

Сами же уравнения (4) примут вид

$$\omega^\alpha_t=\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda}\,a^\alpha_{tk}\,\omega^k,$$
$$\omega^s_\alpha=\frac{1}{\lambda-\lambda_\alpha}\left(a_\alpha\omega^s+a^s_{\alpha\beta}\omega^\beta\right),\quad \omega^\alpha_\beta=\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}\,a^\alpha_{\beta k}\,\omega^k. \qquad (5)$$

Уравнения (5) задают голономное распределение Δ_τ, каждый плоский элемент $\Delta_\tau(x)=[x,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_\tau]$ которого является τ-мерным подпространством в $T_x(A_n)$, а любое его одномерное направление является главным направлением векторного поля $\vec{a}$.

Вдоль любой интегральной поверхности $\omega^\alpha=0$ распределения Δ_τ имеем теперь

$$d\vec{e}_\alpha=a_\alpha\,d\vec{x}+\omega^\beta_\alpha\vec{e}_\beta.$$

Поэтому плоскости $[x,\vec{e}_{\tau+1},\ldots,\vec{e}_n]$ проходят через $(n-\tau-1)$-мерную фиксированную плоскость пространства A_n и образуют осевое оснащение [5] интегральной поверхности распределения Δ_τ.

В частном случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda$, $d\vec{a}=\lambda d\vec{x}$, $\lambda=const$ и, следовательно, $\vec{a}=\lambda(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

4. Если потребовать для векторного поля $\vec{a}$, чтобы в каждой точке x вектор $\vec{a}(x)$ был собственным вектором тензора A, то согласно формуле (3) интегральные кривые векторного поля $\vec{a}$ будут прямыми и образуют прямолинейную конгруэнцию в A_n. Верно и обратное.

Список литературы

1. Georhiev G. Observatia ossupra geometria affine differentiable a cimpurilor de vectori. - Lu. v. conf. de geom. si topolog. Jasi, 1958, 127-128.

2. Слухаев В.В. Некоторые вопросы эквиаффинной геометрии векторного поля.-Тр.Томского ун-та, т.181, 1965, с.68-75.

3. Базылев В.Т. К теории плоских многомерных сетей.-Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина.М., 1965, с.29-37.

4. Либер А.Е. О чебышевских сетях и чебышевских пространствах.-Тр.семинара по векторному и тензорному анализу, 1974, вып.17, с.177-183.

5. Атанасян Л.С. Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве.-Тр.семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып.9, с.351-410.