условия

$$c^{i}_{pq} = 0, \quad c^{n-1}_{pq} = 0. \qquad (4.20)$$

Литература

1. Акивис М.А., Фокальные образы поверхности ранга τ. Известия высших учебных заведений, 1957, 1, 9-19.

2. Вагнер В.В., Теория поля локальных гиперполос. Труды семинара по векторной и тенз. анализу, М.-Л, 1952, т.8, 111-272.

3. Василаян М.А., Об инвариантном оснащении гиперполосы. ДАН Арм.ССР, т.50, №2, 1970, 65-69.

4. Васильян М.А., Проективная теория многомерных гиперполос. Известия АН Арм.ССР, Математика, т.6, 1971, 477-481.

5. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск.матем.общества, 1953, т.2, 275-382.

6. Норден А.П., Пространство аффинной связности, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

7. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. Труды Калининградского ун-та. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 1, 1970, 27-46.

8. Casanova G. „La nation de pôle harmonique", Rev. math. spéc, t65, №6, 1955, 437-440.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ [2,0].

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с кратными вырождающимися фокальными поверхностями. Конгруэнцией (h,k) (соответственно $[h,k]$ или $\{h,k\}$) называется конгруэнция коник в P_3, у которой h фокальных поверхностей (соответственно $2h$ или $3h$) вырождаются в h различных линий, $2k$ фокальных поверхностей вырождаются в k различных точек.

В данной работе рассматриваются конгруэнции коник с двумя двукратными фокальными поверхностями, вырождающимися в линии, то есть конгруэнции $[2,0]$.

§1. Построение репера. Теорема существования.

Определение 1. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойствами: 1/ существуют две фокальные поверхности (S_i) $(i,j,k = 1,2)$, вырождающиеся в линии, причем они являются сдвоенными, 2/ касательные ℓ_i к линиям (S_i) не инцидентны плоскости коники.

Поместим вершины A_i подвижного репера $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ в фокальные точки коники, описывающие линии (S_i), вершину A_3 — в полюс прямой $A_1 A_2'$ относительно коники. Пусть ℓ есть прямая, проходящая через точку A_3 и пересекающая прямые ℓ_i.

Обозначим буквами B_i точки пересечения с прямой ℓ прямых ℓ_i. Вершину A_4 репера R совмещаем с точкой прямой ℓ, являющейся четвертой гармонической к точке A_3 относительно точек B_i.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Уравнения коники относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин репера) запишутся в виде:

$$(x^3)^2 - 2x^1 x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{4}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j \Gamma_1^{31} \omega_i, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ij} \omega_j,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k} \omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ij} \omega_j, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k} \omega_k,$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k \omega_k, \tag{5}$$

$$d\Gamma_1^{31} + \Gamma_1^{31}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + [(\Gamma_1^{31})^2 \Gamma_3^{41} - \Gamma_4^{31}]\omega_1 + [\Gamma_4^{32} - (\Gamma_1^{31})^2 \Gamma_3^{42}]\omega_2 = 0,$$

где

$$\omega_i^4 = \omega_i.$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При внешнем дифференцировании системы уравнений (5) получаем систему квадратичных уравнений:

$$[(\Gamma_1^{31})^2 \Delta\Gamma_3^{41} - \Delta\Gamma_4^{31}] \wedge \omega_1 + [\Delta\Gamma_4^{32} - (\Gamma_1^{31})^2 \Delta\Gamma_3^{42}] \wedge \omega_2 + A\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$
$$\Delta\Gamma_3^{ij} \wedge \omega_j = 0, \quad \Delta\Gamma_3^{4k} \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta\Gamma_4^{ij} \wedge \omega_j = 0, \tag{6}$$
$$\Delta\Gamma_4^{3k} \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta a^k \wedge \omega_k = 0,$$

где

$$A = 2\Gamma_1^{31}[\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} - \Gamma_1^{31}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_3^{21}) + 2(\Gamma_3^{41}\Gamma_4^{32} - \Gamma_3^{42}\Gamma_4^{31})],$$

$$\Delta\Gamma_3^{ij} = d\Gamma_3^{ij} + \Gamma_3^{ij}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + (-1)^j \Gamma_3^{4i}(\Gamma_3^{ij}\Gamma_1^{31} - \Gamma_4^{ij})\omega_i,$$
$$\Delta\Gamma_3^{4i} = d\Gamma_3^{4i} + \Gamma_3^{4i}(\omega_i^i - \omega_3^3) + (-1)^i [\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{41}\Gamma_3^{42} + (-1)^j \Gamma_3^{ij}]\omega_j, \tag{7}$$
$$\Delta\Gamma_4^{ij} = d\Gamma_4^{ij} + \Gamma_4^{ij}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + (-1)^j [\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} + (-1)^i \Gamma_4^{3i}\Gamma_3^{ij}]\omega_i,$$

$$\Delta a^i = da^i + a^i(\omega_i^i - \omega_4^4) + [(-1)^i (a^i \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{4j} - 3\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ij}) - \Gamma_4^{ji} - 2\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{3j}]\omega_j. \quad (7)$$

Замкнутая система (5),(6)- в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}$ с произволом двух функций двух аргументов.

§2.Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$.

О п р е д е л е н и е 2.Конгруэнцией $\mathcal{L}^\circ$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$,обладающая следующими свойствами: 1/касательные к линиям (A_i) пересекаются, 2/точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники.

Т е о р е м а 2.Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Учитывая в уравнениях (5) условия 1/,2/ определения 2,получаем для конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ определяющую её систему уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^j = \omega_i^3 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0\,,\quad \omega_3^i = \Gamma_3^{12}\omega_j\,,\quad \omega_4^i = \Gamma_4^{12}\omega_j\,,$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k\,,\quad d\Gamma_3^{12} + 2\Gamma_3^{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2) = 0, \quad (8)$$

$$d\Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) = 0.$$

Дифференцируем внешним образом систему уравнений (8).Присоединяя к системе (8) полученные квадратичные уравнения, видим,что замкнутая система,определяющая конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$,- в инволюции и её решение существует с произволом одной функции двух аргументов.

Нормируя вершины A_α репера так,чтобы

$$a^i = 1\,, \quad (9)$$

получаем канонический репер конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$.Эта нормировка исключает из рассмотрения следующие классы конгруэнций: 1/ $a^i = 0$, $a^j \neq 0$ -конгруэнции с двукратным фокусом A_i и четырехкратным фокусом A_j ,2/ $a^1 = a^2 = 0$ -конгруэнции с неопределенными фокальными поверхностями.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1^{1k}\omega_k & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \Gamma_2^{2k}\omega_k & 0 & \omega_2 \\ b\,\omega_2 & b\,\omega_1 & \Gamma_3^{3k}\omega_k & 0 \\ p\,\omega_2 & p\,\omega_1 & 0 & \Gamma_4^{4k}\omega_k \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\Gamma_3^{3i} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_1^{1i} + \Gamma_2^{2i} - 1)\,,\quad \Gamma_4^{4i} = \tfrac{1}{2}[1 - 3(\Gamma_1^{1i} + \Gamma_2^{2i})],$$

$$\Gamma_3^{12} = b,\quad \Gamma_4^{12} = p. \quad (11)$$

причем имеет место конечное соотношение

$$3(\Gamma_2^{22} - \Gamma_1^{11}) + 5(\Gamma_1^{12} - \Gamma_2^{21}) = 0. \quad (12)$$

§3.Геометрические свойства конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $\mathcal{L}^\circ$ имеют две невырождающиеся фокальные поверхности (F_i) .Характеристическая точка A_3 инцидентна прямой F_1F_2 .Сдвоенные вырождающиеся фокальные поверхности (A_i) являются плоскими линиями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокальных точек и фокальных семейств конгруэнции коник имеем систему уравнений

$$x^1(x^2+x^3b)\omega_1+x^2(x^1+x^3b)\omega_2=0,\ x^1\omega_1+x^2\omega_2=0,$$
$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^1=0. \tag{13}$$

Исключая из этой системы отношения $\omega_1:\omega_2$, получаем систему уравнений

$$x^1x^2(x^1-x^2)=0,\ (x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0. \tag{14}$$

Из системы уравнений (14), кроме фокальных точек (A_i), которые являются сдвоенными, находим еще два фокуса конгруэнции коник:

$$F_1=A_1+A_2+\sqrt{2}A_3\ ,\quad F_2=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3 \tag{15}$$

Отсюда следует инцидентность точки A_3 прямой F_1F_2. Дифференцируя аналитические точки F_i с учетом матрицы деривационных формул репера (10), убеждаемся, что поверхности (F_i) не вырождаются. Справедливость заключительной части теоремы следует из того, что при любом натуральном n выполняется равенство:

$$(d^{(n)}A_iA_1A_2A_4)=0.$$

Т е о р е м а 4. Фокальные семейства на поверхностях (F_1), (F_2) соответствуют одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (F_1F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейной конгруэнции (F_1F_2) определяются уравнением

$$(\omega_1+\omega_2)(\omega_1-\omega_2)=0. \tag{16}$$

Подставляя координаты точек F_1 и F_2 в систему уравнений (13), заключаем, что фокальные семейства $\omega_1+\omega_2=0$ поверхностей (F_1) и (F_2) соответствуют семейству торсов

$$\omega_1+\omega_2=0 \tag{17}$$

прямолинейной конгруэнции (F_1F_2).

С л е д с т в и е . Пфаффово уравнение $\omega_1+\omega_2=0$ определяет сдвоенное фокальное семейство конгруэнции $\mathcal{L}$.

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $\mathcal{L}^0$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ касательные к линиям $\omega_1-\omega_2=0$, $\omega_1+\omega_2=0$ на поверхностях (A_3) и (A_4) пересекают прямую A_1A_2 в точках E и E^*, гармонически делящих точки A_i, 2/ каждая из поверхностей (A_4), (E), (E^*) является плоскостью $(A_1A_2A_4)$, 3/ $(A_1A_4;R_1R_2)=-(A_2A_4;T_1T_2)$, где $R_i(T_i)$ — точки пересечения касательных к линиям $\omega_i=0$ на поверхности (E) (соответственно (E^*)) с прямой A_1A_4 (A_2A_4), 4/ существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [1], 5/ прямые A_3A_4 образуют связку с центром в точке

$$P=pA_3-bA_4.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Действительно, используя матрицу деривационных формул (10), получаем

$$(dA_3)_{\omega_1-\omega_2=0}=(\omega_3^3)_{\omega_1-\omega_2=0}A_3+b\omega_1E, \tag{18}$$

$$(dA_4)_{\omega_1-\omega_2=0}=(\omega_4^4)_{\omega_1-\omega_2=0}A_4+p\omega_1 E,$$

$$(dA_3)_{\omega_1+\omega_2=0}=(\omega_3^3)_{\omega_1+\omega_2=0}A_3-b\omega_1 E^*, \qquad (18)$$

$$(dA_4)_{\omega_1+\omega_2=0}=(\omega_4^4)_{\omega_1+\omega_2=0}A_3-p\omega_1 E^*,$$

где

$$E=A_1+A_2, \quad E^*=A_1-A_2.$$

2/Так как при любом натуральном числе n имеют место неравенства

$$(d^{(n)}A_4A_1A_2A_4)=0,\ (d^{(n)}EA_1A_2A_4)=0,\ (d^{(n)}E^*A_1A_2A_4)=0, \qquad (19)$$

то каждая из поверхностей $(A_4),(E),(E^*)$ совпадает с плоскостью $(A_1A_2A_4)$.

3/Касательные к линиям $\omega_i=0$ на поверхности (E) пересекают ребро A_1A_4 в точках

$$R_1=(\Gamma_1^{12}-\Gamma_2^{22})A_1+A_4, \quad R_2=(\Gamma_1^{11}-\Gamma_2^{21})A_1+A_4. \qquad (20)$$

На поверхности (E^*) касательные к линиям $\omega_i=0$ пересекают ребро A_2A_4 в точках

$$T_1=(\Gamma_1^{12}-\Gamma_2^{22})A_2-A_4, \quad T_2=(\Gamma_1^{11}-\Gamma_2^{21})A_2+A_4. \qquad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) видно, что $(A_1A_4;R_1R_2)=-(A_2A_4;T_1T_2)$.

4/Условия одностороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2), ассоциированных с конгруэнцией $\mathcal{L}$, тождественно удовлетворяются.

5/Точка P принадлежит прямой A_3A_4, причем

$$dP=(2\omega_4^4+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2)P. \qquad (22)$$

Следовательно, совокупность прямых A_3A_4 является связкой с центром в точке P. Теорема доказана.

Обозначим буквой P^* точку, для которой

$$(A_3A_4;P^*P)=-1, \qquad (23)$$

то есть

$$P^*=pA_3+bA_4. \qquad (24)$$

Т е о р е м а 6. Поверхности (A_3) и (P^*) являются невырождающимися линейчатыми квадриками, пересекающимися по сдвоенной кривой второго порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя аналитическую прямую $[A_3A_i]$ (соответственно $[P^*A_i]$) вдоль линии $\omega_i=0$ получаем

$$d[A_3A_i]=(\omega_3^3+\omega_i^i)[A_3A_i],$$
$$d[P^*A_i]=(-\tfrac{5}{2}\omega_i^i-\tfrac{7}{2}\omega_j^j+\tfrac{1}{2}\omega_1+\tfrac{1}{2}\omega_2)[P^*A_i]. \qquad (25)$$

Значит, линии $\omega_i=0$ являются прямолинейными образующими поверхностей (A_3) и (P^*). Уравнения квадрик (A_3) и (P^*) имеют, соответственно, вид:

$$2x^1x^2-2bx^3x^4-p(x^4)^2=0, \qquad (26)$$

$$2px^1x^2-2bpx^3x^4-p^2(x^4)^2+3b^2(x^3)^2=0. \qquad (27)$$

Квадрики (A_3) и (P^*) пересекаются по сдвоенной конике

$$\Phi\equiv 2x^1x^2-p(x^4)^2=0, \quad x^3=0. \qquad (28)$$

Следствия. 1/Прямая $A_3E\,(A_3E^*)$ является касательной к линии $\omega_1-\omega_2=0$ $(\omega_1+\omega_2=0)$ на квадрике (26).
2/Точками пересечения прямой A_3A_4 с квадриками (26) и (27) (отличными от точек A_3 и P^*) являются точки

$$K_1=pA_3-2bA_4', \quad K_2=pA_3-3bA_4. \qquad (29)$$

3/Точки A_1 и A_2 являются сдвоенными характеристическими точками коники Φ [2].

Действительно,

$$d\Phi\equiv x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)=0.$$

Исключая семейство линий $\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4=0$, вдоль которого коника Φ неподвижна в плоскости $x^3=0$, мы получаем, что вдоль любого другого направления коника (28) имеет сдвоенные характеристические точки A_i.

Литература

1. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, 1956.
2. Малаховский В.С., Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геом.сб., вып.3, Труды Томского ун-та, т.168, 1963, 61-65.

Скрыдлова Е.В.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(C\mathcal{L})_{1,2}$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ – вырожденные конгруэнции [1] пар фигур, порожденные коникой C и прямой $\mathcal{L}$, не имеющей с коникой общих точек и не лежащей в плоскости коники. В конгруэнциях $(C\mathcal{L})_{1,2}$ коники C образуют однопараметрическое семейство, а прямые $\mathcal{L}$ – двупараметрическое (прямолинейную конгруэнцию). Построен геометрически фиксированный репер конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$, подробно исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

§1. Репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

В конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ каждой прямой $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ соответствует единственная коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$.

Пусть N – точка пересечения прямой $\mathcal{L}$ с плоскостью соответствующей ей коники C. В дальнейшем ограничимся рассмотрением конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$ общего типа, а именно когда: