Особая точка кубической гиперповерхности C индуцирует конус [3].

Литература.

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. Геометрия. 1963г. (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М., 1965, 5-64.

2. Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, т. I, ИЛ, М., 1954.

3. Шафаревич И.Р., Основы алгебраической геометрии, М., "Наука", 1972.

4. Махоркин В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" вып. 3, Калининград, 1973, 50-59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 5 1974

Овчинников В.М.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГООБРАЗИЕМ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР.

В статье [3] изучалось дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические образы, ассоциированные с k-мерным многообразием пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -квадратичный элемент [2], а F_2 -не инцидентная ему точка.

§I. Система дифференциальных уравнений многообразия полуквадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n k-мерное многообразие $V_{k,n}$ пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 - квадратичный элемент, а F_2 -не инцидентная ему точка (многообразие полуквадратичных пар фигур).

Расположим вершины A_α $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n)$ репера $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ в гиперплоскости квадратичного элемента F_1, а вершину A_{n+1} совместим с точкой F_2. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_J = \omega_J^{K} A_K,$$

где формы $\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства P_n:

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}, \quad (\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L} = 1,2,\dots,n+1).$$

Формы

$$\theta_{\alpha\beta}, \quad \omega_\alpha^{n+1} = \omega_\alpha, \quad \omega_{n+1}^\alpha = \omega^\alpha,$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} \equiv d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma,$$

являются главными.

Пространство главных параметров обозначим через $\mathfrak{M}_k$. Определим на $\mathfrak{M}_k$ вполне интегрируемую систему форм $\theta^{\hat a}$ $(\hat a, \hat b = 1,2,\dots,k)$ так, что локальные координаты $u^{\hat a}$ пространства $\mathfrak{M}_k$ являются первыми интегралами этой системы форм [4]. Формы $\theta^{\hat a}$ выражаются через дифференциалы координат $u^{\hat a}$ следующим образом:

$$\theta^{\hat a} = u^{\hat a}_{\hat b}\, du^{\hat b}, \quad \det(u^{\hat a}_{\hat b}) \neq 0.$$

Система форм $\theta^{\hat a}$ подчинена структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\hat a} = \theta^{\hat b} \wedge \theta^{\hat a}_{\hat b}.$$

Принимая формы $\theta^{\hat a}$ за базисные, запишем систему пфаффовых уравнений многообразия $V_{k,n}$ в виде

$$\theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,\hat a}\,\theta^{\hat a}, \quad \omega_\alpha = b_{\alpha\hat a}\,\theta^{\hat a}, \quad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_{\hat a}\,\theta^{\hat a}, \qquad (1.1)$$

причем

$$\det(b_{\hat a\hat b}) \neq 0. \qquad (1.2)$$

Уравнения квадратичного элемента F_1 имеют вид:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1 \qquad (1.3)$$

Из равенства единице детерминанта $\det(a_{\alpha\beta})$ следуют тождества

$$a^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta,\hat a} \equiv 0, \qquad (1.4)$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные миноры матрицы $(a_{\alpha\beta})$:

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad a^{\alpha\gamma} a_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\beta. \qquad (1.5)$$

Продолжая систему дифференциальных уравнений (I.I), получим

$$dP_{\alpha\beta,\hat a} = P_{\alpha\beta,\hat b}\,\theta^{\hat b}_{\hat a} + P_{\alpha\gamma,\hat a}\,\omega^\gamma_\beta + P_{\gamma\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\alpha - \frac{2}{n}P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\gamma + P_{\alpha\beta,\hat a\hat b}\,\theta^{\hat b}; \qquad (1.6)$$

$$db_{\alpha\hat a} = b_{\alpha\hat b}\,\theta^{\hat b}_{\hat a} + b_{\beta\hat a}\,\omega^\beta_\alpha - b_{\alpha\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} + b_{\alpha\hat a\hat b}\,\theta^{\hat b}, \qquad (1.7)$$

$$d\Lambda^\alpha_{\hat a} = \Lambda^\alpha_{\hat b}\,\theta^{\hat b}_{\hat a} + \Lambda^\alpha_{\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} - \Lambda^\beta_{\hat a}\,\omega^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{\hat a\hat b}\,\theta^{\hat b}. \qquad (1.8)$$

Размерность k многообразия $V_{k,n}$ удовлетворяет неравенствам:

$$1 \leq k < C^2_{n+1} - n. \qquad (1.9)$$

§2. Геометрические образы, ассоциированные с многообразием $V_{k,n}$.

Ассоциируем с пространством параметров $\mathfrak{M}_k$ проективное пространство P_{k-1} [4] по правилу: точке $\vartheta \in \mathfrak{M}_k$ с локальными координатами $\vartheta^{\hat{a}}$ однозначно ставится в соответствие аналитическая точка $\gamma \in P_{k-1}$ с проективными координатами $\gamma^{\hat{a}}$ относительно некоторого репера $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. Однопараметрическое семейство полуквадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$ зададим системой:

$$\theta^{\hat{a}} = x^{\hat{a}}\Omega, \quad \mathcal{D}\Omega = 0, \tag{2.1}$$

где

$$dx^{\hat{a}} = -x^{\hat{b}}\theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} + x^{\hat{a}}_{\hat{b}}\theta^{\hat{b}}. \tag{2.2}$$

В пространстве P_{k-1} семейству (2.I) соответствует точка

$$B = x^{\hat{a}} C_{\hat{a}}. \tag{2.3}$$

Выделим в гиперплоскости $x^{n+1} = 0$ инвариантную точку

$$P = c^{\alpha} A_{\alpha}. \tag{2.4}$$

Имеем

$$dP = (dc^{\alpha} + c^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta})A_{\alpha} + c^{\alpha}\omega^{n+1}_{\alpha} A_{n+1}. \tag{2.5}$$

Смещению (2.I) соответствует точка

$$\overset{*}{P} = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} A_{n+1}. \tag{2.6}$$

Наряду с (2.I) рассмотрим другое однопараметрическое семейство пар фигур $\{F_1, F_2\}$:

$$\theta^{\hat{a}} = y^{\hat{a}}\Omega^1, \quad \mathcal{D}\Omega^1 = 0. \tag{2.7}$$

Так как

$$d\overset{*}{P} = (dc^{\alpha} \cdot b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} + c^{\alpha} b_{\beta\hat{a}}\omega^{\beta}_{\alpha} x^{\hat{a}} + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}}\theta^{\hat{b}}x^{\hat{a}} + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}}_{\hat{b}}\theta^{\hat{b}})A_{n+1} + c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}}\Lambda^{\beta}_{\hat{b}}\theta^{\hat{b}} A_{\beta}, \tag{2.8}$$

то точка

$$N = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} \Lambda^{\beta}_{\hat{b}} y^{\hat{b}} A_{\beta} \tag{2.9}$$

есть пересечение касательной к линии, описываемой точкой с гиперплоскостью $x^{n+1} = 0$.

Семействам (2.7), которым отвечают проективные преобразования

$$\tilde{c}^{\beta} = c^{\alpha} b_{\alpha\hat{a}} x^{\hat{a}} \Lambda^{\beta}_{\hat{b}} y^{\hat{b}}, \tag{2.10}$$

являющиеся преобразованиями W [I], в проективном пространстве P_{k-1} соответствует гиперплоскость

$$u_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} y^{\hat{b}} = 0, \tag{2.11}$$

где

$$u_{\hat{a}\hat{b}} = b_{\alpha\hat{a}} \cdot \Lambda^{\alpha}_{\hat{b}}. \tag{2.12}$$

Совокупность точек пространства P_{k-1}, которым соответствует гиперплоскость (2.II), образуют основную [I] гиперквадрику в проективном пространстве P_{k-1}:

$$u_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} = 0. \tag{2.13}$$

Литература

I. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б., К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. Материалы 3-й научн. конф. по математике и механике. Вып. I, Изд-во Томского ун-та, I973, 50-52.

2. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. "Геом. сб.", вып. 3, Труды Томского ун-та, т. I68, 28-42.

3. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. 2 (Труды Калининградского ун-та), I971, 38-42.

4. Остиану Н.М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. Труды геом. семинара, т. 2, М., ВИНИТИ АН СССР, I969, 247-262.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 5 1974

П о п о в Ю.И., М и ш е н и н а Т.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ $(n-2)$-МЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ CH^{r}_{n-2} РАНГА r МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденную $(n-2)$-мерную гиперполосу H^{r}_{n-2} ранга r [7], т.е. такую гиперполосу, семейство касательных гиперплоскостей которой зависит от r существенных параметров $(r<n-2)$. Каждая касательная гиперплоскость касается базисной поверхности V^{r}_{n-2} гиперполосы H^{r}_{n-2} по $(n-r-2)$-мерной плоскости E_s (где $s = n-r-2$), являющейся её плоской образующей. В данной работе мы рассматриваем гиперполосы H^{r}_{n-2} с такими базисными поверхностями V^{r}_{n-2}, вдоль плоских образующих E_s которых касательная плоскость T_{n-2} постоянна.

Вырожденную гиперполосу назовем центрированной, если в каждой её плоской образующей E_s задана некоторая точка, называемая центром данной плоской образующей. Центрирование называется нормальным [2], если множество всех центров плоских образующих является r-мерной поверхностью