$$H_n^{\alpha} = -y^{\alpha} b_{\sigma}^{n}(x^n)\frac{y^{\sigma}}{y^n} - (a_{\rho}^{\alpha''}\left(x^n\right)\tilde{a}_{\sigma}^{\rho}\left(x^n\right) + \Theta_{\sigma}^{\alpha}\left(x^n\right))y^{\sigma} +$$

$$+ b_n\left(x^n\right)y^{\alpha} + \gamma_n^{\alpha}\left(x^n\right)y^n, \;\; H_{\beta}^{n} = y^n b_{\beta}^{n}\left(x^n\right),$$

где $\left\|\tilde{a}_{\sigma}^{\rho}\left(x^n\right)\right\|$ — матрица, обратная матрице $\left\|a_{\rho}^{\alpha'}\right\|$ $\left(\alpha,\beta,\sigma,\rho=\overline{1,n-1}\right)$.

Список литературы

1. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. New York, 1973.

N. Nikitin

ON LIE ALGEBRA OF ABEL'S GROUP OF TRANSFORMATIONS WITH (n–1)-DIMENSIONAL ORBITS WHICH KEEPS INVARIANT OF NON-LINEAR CONNECTION

It is shown that maximal dimension of Lie algebra of Abel's group of transformations with (n–1)-dimensional orbits which keeps invariant of non-linear connection is equal to $2n$–2.

УДК 514.75

О. М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

О ВНУТРЕННИХ КРИВИЗНАХ 1-го И 2-го ТИПОВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Произведено внутреннее композиционное оснащение этого распределения. Доказано, что это оснащение индуцирует в главном расслоении внутренние кривизны 1-го и 2-го типов.

Ключевые слова: распределение плоскостей, главное расслоение, оснащение, инвариант, связность, тензор кривизны.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,\ldots=\overline{1,n};\ i,\ldots=\overline{1,m};\ a,\ldots=\overline{m+1,n}.$$

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$ с деривационными формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A$$

и структурными уравнениями Картана

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ \ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,$$
$$D\omega_I^J=\omega_I\wedge\omega^J+\omega_I^K\wedge\omega_K^J+\delta_I^J\omega_K\wedge\omega^K.$$

В проективном пространстве P_n продолжим исследование распределения m-мерных плоскостей NS_n. Структурные уравнения распределения имеют следующий вид:

$$\omega_i^a=\Lambda_{iJ}^a\omega^J; \tag{1}$$
$$\Delta\Lambda_{ij}^a=\tilde{\Lambda}_{ijK}^a\omega^K,\ \Delta\Lambda_{ib}^a-\Lambda_{ij}^a\omega_b^j-\delta_b^a\omega_i=\Lambda_{ibK}^a\omega^K, \tag{2}$$
$$\Delta\Lambda_{ij}^a=d\Lambda_{ij}^a+\Lambda_{ij}^b\omega_b^a-\Lambda_{ik}^a\omega_j^k-\Lambda_{kj}^a\omega_i^k.$$

С распределением NS_n ассоциировано [1; 2] главное расслоение $G(U_n)$ с базой U_n — областью проективного пространства P_n, описанной центром плоскости P_m^*. В этом расслоении способом Г. Ф. Лаптева (приемом Ю. Г. Лумисте) задана связность полем объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{jK}^i,\Gamma_{iJ},\Gamma_{bI}^a,\Gamma_{aJ}^i,\Gamma_{aI}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям [1], в частности:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i+\omega_{jk}^i=\Gamma_{jkI}^i\omega^I,\ \ \Delta\Gamma_{ja}^i-\Gamma_{jk}^i\omega_a^k+\omega_{ja}^i=\Gamma_{jaI}^i\omega^I,$$
$$\Delta\Gamma_{ij}+\Gamma_{ij}^k\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijJ}\omega^J,\ \Delta\Gamma_{ia}-\Gamma_{ij}\omega_a^j+\Gamma_{ia}^j\omega_j+\omega_{ia}=\Gamma_{iaJ}\omega^J, \tag{3}$$
$$\Delta\Gamma_{bi}^a+\omega_{bi}^a=\Gamma_{biJ}^a\omega^J,\ \ \Delta\Gamma_{bc}^a-\Gamma_{bi}^a\omega_c^i+\omega_{bc}^a=\Gamma_{bcI}^a\omega^I,\ldots$$

Объект связности Γ содержит ряд подобъектов [1; 2]. Определен объект кривизны $R=\{R_{jkl}^i,R_{jka}^i,R_{jab}^i,\ldots\}$ связности Γ, чьи компоненты выражаются через компоненты объекта Г и их пфаффовы производные, например:

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}, \quad R^i_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]},$$
$$R^i_{jka} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}) - \Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]}, \ldots \tag{4}$$

Объект кривизны R связности Γ является тензором и содержит ряд подтензоров, соответствующих подобъектам объекта связности Γ.

Будем предполагать, что существует нетривиальный относительный инвариант I, построенный из компонент фундаментального подобъекта 1-го порядка $\{\Lambda^a_{ij}\}$, то есть $I = I(\Lambda^a_{ij})$, дифференциальные уравнения которого имеют вид [3]:

$$d\ln I = 2(n-m)\omega^i_i - m\omega^a_a + I_K\omega^K.$$

К распределению плоскостей присоединим подобъект 1-го порядка $\{V^a_{ij}\}$, компоненты которого — частные производные логарифма инварианта по компонентам фундаментального подобъекта Λ^a_{ij}:

$$V^{ij}_a = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda^a_{ij}}.$$

Этот объект является тензором, и мы будем называть его обращенным тензором [3] 1-го порядка распределения NS_n.

Ранее произведено [4] композиционное оснащение распределения NS_n, состоящее в задании на нем аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена

$$C_{n-m-1}\colon\ \mathrm{P}^*_{\mathrm{m}} \oplus C_{n-m-1} = P_n,\ N_{m-1}\colon A \oplus N_{m-1} = \mathrm{P}^*_{\mathrm{m}}$$

и определяемое полем квазитензора $\lambda=\{\lambda^i_a,\ \lambda_a,\ \lambda_i\}$. Доказано [4], что распределение NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в расслоении $G(U_n)$ связности 1-го $\overset{01}{\Gamma}$ и 2-го $\overset{02}{\Gamma}$ типов с компонентами, определяемыми, в частности, по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j, \quad \overset{1}{\Gamma}_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j,$$
$$\overset{02}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k - 2\lambda_i\lambda_j, \ldots \tag{5}$$

Построены кривизны 1-го и 2-го типов, порожденные связностями 1-го и 2-го типов, то есть получены охваты компонент тензоров кривизны $\overset{01}{R}$ и $\overset{02}{R}$ объектами связностей $\overset{01}{\Gamma}$ и $\overset{02}{\Gamma}$, а именно:

$$\overset{0}{R}{}^i_{jkl} = \Lambda^a_{j[k}t^i_{al]} - \delta^i_j t_{[kl]} - \delta^i_{[k}t_{jl]}, \quad \overset{01}{R}_{ijk} = \Lambda^a_{i[j}t_{ak]} - t_{i[k}\lambda_{j]} - \lambda_i t_{[jk]},$$
$$\overset{02}{R}_{ijk} = \overset{0}{R}{}^l_{ijk}\lambda_l - \Lambda^a_{[jk]}\lambda_{ia}, \quad \overset{02}{R}{}^i_{ajk} = \overset{0}{R}{}^b_{ajk}\lambda^i_b - \overset{0}{R}{}^i_{ljk}\lambda^l_a - \Lambda^b_{[jk]}\lambda^i_{ab}, \tag{6}$$

где компоненты тензора неспециальных смещений t [4] выражаются по формулам

$$t^i_{aj} = \lambda^i_{aj} - \Lambda^b_{kj}\lambda^i_b\lambda^k_a + \delta^i_j\lambda_a,$$
$$t_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \lambda_i\lambda_j, \tag{7}$$
$$t_{ai} = \lambda_{ai} - \Lambda^b_{ji}\lambda^j_a\lambda_b, \ldots$$

Выражения охватов для остальных компонент тензоров кривизны определяются по формулам, аналогичным (6), но имеют более громоздкий вид.

Замечание. Охваты компонент тензора кривизны 1-го типа представляют собой функции компонент тензора неспециальных смещений t, оснащающего квазитензора и фундаментального объекта 1-го порядка распределения.

Из уравнений (6) вытекают следующие утверждения [5]:

Теорема 1. *Неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* ($t = 0$) *влечет обращение в нуль тензора кривизны 1-го типа.*

Теорема 2. *В случае голономного распределения неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* ($t = 0$) *влечет обращение в нуль тензора кривизны 2-го типа.*

Цель настоящей статьи — построение внутренних кривизн 1-го и 2-го типов, порожденных только фундаментальным объектом и обращенным тензором 1-го порядка распределения. Для решения этой задачи нам необходимо охватить оснащающий квазитензор

λ, то есть представить в виде функции $\lambda = \lambda(\Lambda, V)$. В работе [4] были найдены охваты компонент квазитензора λ и его пфаффовых производных λ' с помощью фундаментального объекта и его обращенного подобъекта, а именно:

$$\lambda_i = \frac{1}{n-m-1}\left(\frac{1}{n-m}\Lambda^a_{ij}\Lambda^b_{ka}V^{kj}_b - \Lambda^a_{ia}\right),$$

$$\lambda^i_a = \frac{1}{n-m}\left[\frac{1}{n-m-1}V^{ji}_a\left(\Lambda^b_{jb} - \frac{1}{n-m}\Lambda^b_{jk}\Lambda^c_{lb}V^{lk}_c\right) - \Lambda^b_{ja}V^{ji}_b\right], \qquad (8)$$

$$\lambda_a = \frac{1}{m}\left(\Lambda^b_{ki}\lambda^k_a\lambda^i_b - \lambda^i_{ai}\right), \quad \lambda_{iJ} = -\frac{1}{n-m-1}\left(\Lambda^a_{iaJ} - \frac{1}{n-m}\Lambda^a_{ij}V^{kj}_b\Lambda^b_{kaJ}\right),$$

$$\lambda^i_{aJ} = -\frac{1}{n-m}\left(V^{ji}_b\Lambda^b_{jaJ} + V^{ji}_a\lambda_{jJ}\right).$$

Подставляя выражения охватов (8) в формулы охватов (6) и аналогичные им для кривизн 1-го и 2-го типов, получаем выражения охватов для внутренних кривизн 1-го и 2-го типов распределения плоскостей, которые имеют достаточно громоздкий вид.

Теорема 3 [6]. *Распределение NS_n и его внутреннее композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(U_n)$ внутренние кривизны 1-го и 2-го типов.*

Список литературы

1. *Омельян О.М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 33. Калининград, 2002. С. 74—78.

2. *Омельян О.М., Шевченко Ю.И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Матем. заметки. М., 2008. Т. 84:1. С. 99—107.

3. *Омельян О.М.* Внутренние групповые связности на распределении плоскостей // Вестник ЧПГУ им. И.Я. Яковлева. 2006. №5 (52). С. 120—125.

4. *Омельян О.М.* Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Межд. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 63—69.

5. *Омельян О.М.* О совпадении кривизн 1-го и 2-го типов на распределении плоскостей // Тезисы докладов междунар. конф. «Лаптевские чтения — 2009». Тверь, 2009. С. 23.

6. *Омельян О.М.* Внутренняя кривизна 1-го типа на распределении плоскостей // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2009. Т. 39. С. 313—315.

O. Omelyan

ABOUT INTERNAL CURVATURES OF THE 1ST AND 2ND TYPES ON THE PLANES DISTRIBUTION

In many-dimensional projective space the planes distribution is considered. Internal composite clothing of the planes distribution is made. It is proved, that this clothing induces in the principal fiber bundle internal curvatures of the 1st and 2nd types.

УДК 514.745

К.В. Полякова

(Российский государственный университет им. И. Канта Калининград)

ОБОБЩЕНИЕ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА С ПОМОЩЬЮ ВИРТУАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрено обобщение внешнего дифференциала и приведены некоторые его свойства.

Ключевые слова: внешние формы, обобщение внешнего дифференциала, скобка векторных полей.

Рассмотрим дифференциальную p-форму

$$\overset{p}{\omega} = a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \overset{def}{=} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1 \ldots i_p},$$

где $a_{i_1 \ldots i_p} = a_{i_1 \ldots i_p}(x^j, x^\xi)$, причем индексы принимают следующие значения:

$$i_1, \ldots, i_p, j = \overline{1, n}, \ \xi = \overline{n+1, n+s}, \ \alpha = \overline{n+s+1, n+s+s_1}.$$