УДК 517.9

*О. Н. Шабловский*

# РАСПАД СЛАБОГО РАЗРЫВА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЕ С ИСТОЧНИКОМ

*Рассмотрено пространственно нелокальное волновое уравнение четвертого порядка с источником. Результаты изложены в терминах теории теплопереноса. Производная от функции источника по температуре положительная (источник технического происхождения) либо отрицательная (источник, характерный для биологической ткани). Скорость волны (дозвуковая, звуковая, сверхзвуковая) определяется по отношению к скорости распространения тепловых возмущений. Даны примеры точного решения задачи о распаде слабого разрыва температурного поля. Эта задача состоит в следующем. В начальном состоянии непрерывное тепловое поле содержит точку, в которой располагается слабый разрыв, а именно: здесь терпит разрыв первого рода первая производная по координате. В последующем слабый разрыв распадается на две волны, распространяющиеся в противоположных друг другу направлениях. Подробно обсуждены разнообразные ситуации, при которых происходит возбуждение разбегающихся волн. Источник технического происхождения: две волны, бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью; неоднородный фон перед волнами является пространственно-периодическим; в отдельном случае неоднородность фона локализована на обеих сторонах слабого разрыва. Источник в биологической ткани: тепловое поле между волнами есть суперпозиция двух бегущих волн, для которых произведение модулей скоростей перемещения равно квадрату скорости распространения тепловых возмущений. Неоднородный фон перед волнами является пространственно-периодическим и, в частности, представляет собой биения по пространственной координате. Построен пример распада слабого разрыва, для которого в ходе эволюции во времени в возмущенной области формируется стоячая волна.*

*A spatially non-local fourth-order wave equation with a source is considered. The results are set out in terms of the heat transfer theory. The temperature derivative of the source function is positive (a technical source) or negative (a source in biological tissue). The wave velocity (subsonic, sonic, supersonic) is determined with respect to the velocity of propagating heat perturbations. We give examples of the exact solving the problem of disintegration of a weak discontinuity in the temperature field. This problem is set as follows. In the initial state the continuous thermal field contains a point of a weak discontinuity; in that point the first coordinate derivative undergoes a first-order rupture. Further the weak discontinuity disintegrates into two waves which propagate in opposite directions. Initiation of such waves is discussed in detail. A technical source: two subsonic, sonic or supersonic waves; the non-uniform space in front of the waves is spatially periodic; in a particular case spatial non-uniformity is localized on both sides of a weak discontinuity. A source in biological tissue: the thermal field between the waves is a superposition of two running waves for which the product of velocity moduli is equal*





*Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.*
*Сер.: Физико-математические и технические науки. 2020. № 1. С. 84 – 96.*

*to the square of propagating thermal perturbations velocity. The non-uniform space in front of the waves is spatially periodic and is displayed as spatial coordinate beating. An example is built for disintegration of a weak discontinuity when time evolution in the perturbed region leads to forming a standing wave.*

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нелокальность, источник энергии, стоячая волна.

**Keywords:** wave equation, nonlocality, energy source, standing wave.

## Введение



Теория волн имеет широкую область практических приложений. В данной работе для определенности говорим о волнах в системе «среда — источник энергии» и пользуемся терминами теории теплопереноса. Гиперболическое уравнение теплопроводности

$$c\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+\gamma\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}\right)=\lambda\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}+q_\upsilon \qquad (1)$$

учитывает конечную скорость $w=(\lambda/c\gamma)^{1/2}$ распространения тепловых возмущений. Здесь $t$ — время; $x$ — декартова координата; $\tau=T-T^0$ есть отклонение температуры $T$ от ее отсчетного значения $T^0\equiv\mathrm{const}$; $c$ — объемная теплоемкость; $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $\gamma$ — время релаксации теплового потока; $q_\upsilon$ — мощность внутренних источников и стоков энергии.

Уравнение (1) имеет строгое физическое обоснование [1] и выводится с помощью вариационных принципов [2; 3]. Примеры термодинамического анализа неклассических (в том числе нелокальных) процессов переноса массы, импульса и энергии изложены в [4]. Волновое уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}-w^2\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}=k_\upsilon(\tau)\equiv q_\upsilon/(c\gamma) \qquad (2)$$

следует из (1) при $\gamma\partial/\partial t>>1$, когда волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным. При учете пространственно-нелокальных эффектов переноса (см. [5] и указанную там библиографию) в правой части уравнения (2) появляется слагаемое $\varepsilon\chi_1^2\,\partial^4\tau/\partial x^4$, где $\varepsilon\chi_1^2$ есть параметр слабой нелокальности задачи. Современное состояние математических исследований нелокального волнового уравнения представлено в [6—9].

Волна, распространяющаяся со скоростью $N=dx/dt$, является дозвуковой / сверхзвуковой, если $N/w$, соответственно, меньше / больше единицы. Для перехода к безразмерным величинам будем применять масштабы температуры $\tau_b$ и времени $t_b$:

$$(\tau/\tau_b)\to\tau\,;\ (t/t_b)\to t\,;\ [x/(wt_b)]\to x'\,;$$
$$[(k_\upsilon t_b^2)/\tau_b]\to k_\upsilon\,;\ \ [\varepsilon\chi_1^2/(w^4 t_b^2)]\to(\varepsilon\chi^2).$$

В результате имеем безразмерную форму записи нелокального волнового уравнения в пределе слабой нелокальности:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial(x')^2}-\varepsilon\,\chi^2\,\frac{\partial^4\tau}{\partial(x')^4}=k_\upsilon\,. \qquad (3)$$

Волна дозвуковая, если $(dx'/dt)<1$; волна сверхзвуковая, если $(dx'/dt)>1$. Далее рассматриваем источник вида



$$k_\upsilon=k_\upsilon^1\,\tau\,,\ k_\upsilon^1\equiv\text{const}\,. \qquad (4)$$

Данный источник моделирует процессы энергообмена в системах различной физической природы.

Источник технического происхождения (tech-источник, $k_\upsilon^1>0$) положителен в области «высоких» температур $\tau>0$, где происходит подвод тепла, и отрицателен при «низких» температурах $\tau<0$ (например, вследствие теплоотвода от элемента технического устройства в окружающую среду). Источник, типичный для биологической ткани (bio-источник, $k_\upsilon^1<0$), отличается от объектов неживой природы тем, что выполняет уравновешивающую роль компенсатора [10]: при «высоких» температурах $\tau>0$ идет теплоотвод; при «низких» температурах $\tau<0$ происходит выделение энергии. Задачи теплопереноса в биологической ткани рассматривались в публикациях [11—14]. В статье [15] определена роль комплекса $k_\upsilon^1\varepsilon\chi^2$ при оценке границ устойчивости / неустойчивости колебаний теплового поля.

**Цель работы:** для уравнения (3) с источником (4) построить новые точные решения, физическое содержание которых связано с процессом образования волн при распаде слабого разрыва теплового поля.

## Tech-источник

Уравнение (3) запишем в виде системы, определяющей две неизвестные функции τ, θ:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial(x')^2}=k_\upsilon\,;\ \theta=\tau+\varepsilon\,\chi^2\,\frac{\partial^2\tau}{\partial(x')^2}\,. \qquad (5)$$

Перейдем к независимым переменным

$$\alpha=x'+Mt\,,\ \beta=x'-Mt\,,\ M\equiv\text{const}$$

и представим решение в виде

$$\tau=\exp(k\beta)\tau_1(\alpha),\ \theta=\exp(k\beta)\theta_1(\alpha),\,k\equiv\text{const}\,. \qquad (6)$$

Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M^2\left(\frac{d^2\tau_1}{d\alpha^2}-2k\frac{d\tau_1}{d\alpha}+k^2\tau_1\right)=k_\upsilon^1\tau_1+k^2\theta_1+2k\frac{d\theta_1}{d\alpha}+\frac{d^2\theta_1}{d\alpha^2}, \qquad (7)$$

$$\theta_1=\tau_1+\varepsilon\chi^2\left(\frac{d^2\tau_1}{d\alpha^2}+2k\frac{d\tau_1}{d\alpha}+k^2\tau_1\right). \qquad (8)$$

Примем следующие связи между параметрами задачи:

$$\varepsilon<0\,,\; k^2=1/\left(-\varepsilon\chi^2\right)>0\,, M^2=-\varepsilon\chi^2 k_\upsilon^1,\; k_\upsilon^1>0\,. \qquad (9)$$



Тогда (8) и (9) дают возможность проинтегрировать один раз уравнение (7):

$$\frac{d^3\tau_1}{d\alpha^3}+4k\frac{d^2\tau_1}{d\alpha^2}+\left(5+M^2\right)k^2\frac{d\tau_1}{d\alpha}+2k^3\left(1-M^2\right)\tau_1=0\,. \qquad (10)$$

Константа интегрирования несущественна и принята нулевой. Взяв экспоненциальную форму решения $\tau_1(\alpha)=\exp(\alpha z)$, $z\equiv\mathrm{const}$, выводим из (10) характеристическое уравнение:

$$z^3+pz+q=0\,,$$

$$p=k^2\left[M^2-(1/3)\right], q=2k^3\left(17-15M^2\right)/9\,.$$

Рассмотрим три частных случая, когда решение удается представить в обозримой форме.

Значение $M^2=1$ дает возможность понизить на единицу порядок уравнения (10) и получить решение

$$\tau^{\mp}=C_1\exp[-k(x'\pm 3t)]\sin\left[(x'\pm t)k\sqrt{2}+\alpha_1\right];\; C_1,\alpha_1-\mathrm{const}, \qquad (11)$$

где верхний знак (решение $\tau^-$) относится к левой части оси ($x'\le 0$, $k>0$), нижний знак (решение $\tau^+$) — к правой части оси ($x'\ge 0$, $k<0$). Для простоты записи берем $C_1^-=C_1^+=C_1$, $\alpha_1^-=\alpha_1^+=\alpha_1$. Данное решение позволяет рассмотреть задачу о распаде слабого разрыва на две волны возмущения, распространяющиеся в противоположных направлениях. В начальном ($t=0$) состоянии имеем при $x'\in(-\infty,\infty)$ непрерывное температурное поле:

$$\tau=\tau_0^-(x'),\; x'\le 0\,;\; \tau=\tau_0^+(x'),\; x'\ge 0\,,$$

$$\tau_0^-(0)=\tau_0^+(0)\,.$$

Вместе с тем в точке $x'=0$ располагается слабый разрыв, потому что здесь терпит разрыв первого рода первая производная по координате:

$x'=0$, $d\tau_0^-(x')/dx' \neq d\tau_0^+(x')/dx'$. При $t>0$ слабый разрыв распадается на две волны $x'=\mp 3t$, распространяющиеся по пространственно-периодическому фону $\tau_0^{\mp}(x')=C_1 \sin\left[\left(2kx'\sqrt{2}/3\right)+\alpha_1\right]$, $kx'\leq 0$. Температурное поле между этими волнами описывается решением (11). На основе (11) можно рассмотреть неоднородный по координате и затухающий на бесконечности температурный фон:

$$\tau_0^{\mp}(x')=C_1 \exp\left[kx'\frac{(1-\delta_1)}{\delta_1}\right]\sin\left[kx'\sqrt{2}\,\frac{(3\delta_1-1)}{3\delta_1}+\alpha_1\right]; \tag{12}$$



$$kx'\leq 0,\ 0<\delta_1\leq 1;\ x'\to\mp\infty,\ \tau^{\mp}\to 0.$$

В этом случае разбегающиеся волны имеют вид $x'=\mp 3\delta_1 t$. Скорости волн дозвуковые при $0<\delta_1<(1/3)$ и сверхзвуковые при $(1/3)<\delta_1\leq 1$. Для $\delta_1=1/3$ фон (12) — апериодический по $x'$, а волны распространяются со скоростью «звука» $w$. Представляет интерес случай $\delta_1=+0$, когда $\left[(1-\delta_1)/\delta_1\right]>>1$, то есть неоднородность фона (12) локализована на обеих сторонах слабого разрыва, и происходит медленное расширение области решения.

Значение $M^2=17/15$ дает корни $z_{1,2}=\pm 2ki/\sqrt{5}$, поэтому решение (6), (10) выглядит так:

$$\tau=C_1\exp(k\beta)\sin\left[\left(2k\alpha/\sqrt{5}\right)+\alpha_1\right];\ C_1,\alpha_1-\mathrm{const}; \tag{13}$$

$$\alpha=x'+M_1 t,\ \beta=x'-M_1 t,\ M_1^2=17/15.$$

Интерпретация этого решения такая же, как для $M^2=1$: задача о распаде слабого разрыва. Для левой и правой полуосей имеем, соответственно,

$$\tau^-=\tau(\alpha,\beta) \text{ при } k>0,\ x'\leq 0,\ M_1=M_1^-=-(17/15)^{1/2};\ \tau^+=\tau(\alpha,\beta)$$

при $k<0$, $x'\geq 0$, $M_1=M_1^+=(17/15)^{1/2}$.

Температурный фон слева и справа от слабого разрыва:

$$\tau_0^{\mp}(x')=C_1\exp\left[kx'\frac{(\delta_1-1)}{\delta_1}\right]\sin\left[\frac{2kx'}{\sqrt{5}}\frac{(\delta_1+1)}{\delta_1}+\alpha_1\right]; \tag{14}$$

$$kx'\leq 0,\ \delta_1\geq 1;\ C_1^-=C_1^+=C_1,\ \alpha_1^-=\alpha_1^+=\alpha_1.$$

Разбегающиеся со сверхзвуковой скоростью волны имеют вид $x'=\delta_1 M_1^{\mp} t$.

Значение $M^2=1/3$ дает корни $z_{1,2}=kb_3\left(1\pm i\sqrt{3}\right)/2$, $b_3=(8/3)^{1/3}$, $z_3=-kb_3$. Часть решения, которая относится к корню $z_3$, не представляет интереса, а на основе корней $z_1$, $z_2$ получаем

$$\tau = C_1 \exp\left[kx'\left(1+\frac{b_3}{2}\right)+kM_2 t\left(\frac{b_3}{2}-1\right)\right]\sin\left[kb_3\frac{\sqrt{3}}{2}(x'+M_2 t)+\alpha_1\right]; \quad (15)$$

$$C_1, \alpha_1 - \mathrm{const},\ M_2^2 = 1/3 .$$

В задаче о распаде слабого разрыва для левой и правой полуосей имеем, соответственно, $\tau^- = \tau(x', t)$ при $k > 0$, $x' \le 0$, $M_2 = M_2^- = -1/\sqrt{3}$; $\tau^+ = \tau(x', t)$ при $k < 0$, $x' \ge 0$, $M_2 = M_2^+ = 1/\sqrt{3}$. Температурный фон слева и справа от слабого разрыва:

$$\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \exp\left[kx'\left(1+\frac{b_3}{2}\right)\frac{(\delta_1 - 1)}{\delta_1}\right]\sin\left[kb_3\frac{\sqrt{3}}{2}x'\left(1+\frac{B_3}{\delta_1}\right)+\alpha_1\right]; \quad (16)$$

$$kx' \le 0,\ \delta_1 \ge 1,\ B_3 = \left(1+\frac{b_3}{2}\right)\Big/\left(1-\frac{b_3}{2}\right); C_1^- = C_1^+ = C_1,\ \alpha_1^- = \alpha_1^+ = \alpha_1 .$$

Разбегающиеся волны имеют вид $x' = \delta_1 M_2^{\mp} t / B_3$. Движение дозвуковое, если $1 \le \delta_1 < (B_3\sqrt{3})$; движение сверхзвуковое, если $\delta_1 > (B_3\sqrt{3})$; значение $\delta_1 = B_3\sqrt{3}$ дает звуковую волну.

Качественные свойства полученных решений представлены в таблице 1.

*Таблица 1*

**Tech-источник: точные решения уравнения (3), (4) при $\varepsilon < 0$, $k_\upsilon^1 > 0$**

| Значение параметра $M^2 = -\varepsilon\chi^2 k_\upsilon^1$ | Волновой процесс и его свойства |
|---|---|
| $M^2 = 1$ | Решение (11): распад слабого разрыва на две волны $x' = \mp 3\delta_1 t$, $\delta_1 \in (0,1]$, бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Неоднородный фон: зависимость (12) и ее частные варианты, обусловленные выбором $\delta_1$ |
| $M^2 = 17/15$ | Решение (13): распад слабого разрыва на две сверхзвуковые волны $x' = \mp\delta_1 (17/15)^{1/2} t$, $\delta_1 \ge 1$. Неоднородный фон: периодическая по координате зависимость (14), имеющая постоянную либо убывающую по экспоненте амплитуду |
| $M^2 = 1/3$ | Решение (15): распад слабого разрыва на две волны $x' = \mp\, \delta_1 t / (B_3\sqrt{3})$, $\delta_1 \ge 1$, бегущие с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Неоднородный фон: затухающая в периодическом режиме зависимость (16); частный случай — синусоидальные колебания с постоянной амплитудой |
| Основной результат: аналитическое описание разбегающихся волн, возбуждаемых слабым разрывом теплового поля | |

## Bio-источник

Обсудим возможности аналитического описания системы уравнений (5) при $\varepsilon > 0$, $k_\upsilon^1 < 0$. Сделаем замену $k = il$, $\alpha = i\varphi$ в (6)—(8) и примем следующие связи:

$$\varepsilon > 0,\ l^2 = 1/\left(\varepsilon\chi^2\right) > 0,\ M^2 = -\varepsilon\chi^2 k_\upsilon^1 > 0,\ k_\upsilon^1 < 0. \tag{17}$$

Действуем аналогично предыдущему и вместо (10) получаем уравнение

$$\frac{d^3\tau_1}{d\varphi^3} - 4l\frac{d^2\tau_1}{d\varphi^2} + \left(5 + M^2\right)l^2\frac{d\tau_1}{d\varphi} - 2l^3\left(1 - M^2\right)\tau_1 = 0. \tag{18}$$

При работе с функциями вида $\exp(il\beta)$ выделяем действительные части решения; для мнимых частей структура аналитических выражений такая же. Характеристическое уравнение, соответствующее (18), выглядит так:

$$z^3 + pz + q = 0,$$

$$p = l^2\left[M^2 - (1/3)\right],\ q = -2l^3\left(17 - 15M^2\right)/9.$$

Конечную форму решения получаем для трех частных значений параметра $M^2 = 1;\ 17/15;\ 1/3$. Если $M^2 = 1$, то

$$\tau = C_1\exp(2l\varphi)\sin\left(\varphi l\sqrt{2} + \varphi_1\right)\cos l\beta;\ C_1, \varphi_1 - \text{const}; \tag{19}$$

$$\beta = x' - Mt,\ \varphi = x' + Mt,\ M^2 = 1,\ l^2M^2 = -k_\upsilon^1 > 0.$$

Физическая интерпретация решения состоит в следующем. В начальном состоянии имеем непрерывное при $x' \in (-\infty, \infty)$ тепловое поле: для левой части оси $x' \le 0$, $l < 0$, $M^- = 1$, $\tau_0^-(x') = C_1\sin\varphi_1\cos 2lx'$; для правой части оси $x' \ge 0$, $l > 0$, $M^+ = -1$, $\tau_0^+(x') = C_1\sin\varphi_1\cos 2lx'$. Слабый разрыв отсутствует. При $\varphi_1 = 0$ начальное тепловое поле однородное: $\tau_0^{\mp} = 0$. В сечении $x' = 0$ температура изменяется по закону

$$\tau(x' = 0, t) = C_1\exp(2lMt)\sin\left(lMt\sqrt{2} + \varphi_1\right)\cos(lMt),\ t \ge 0 \tag{20}$$

и возбуждает две звуковые волны $x' = \mp t$, бегущие в разные стороны. Отметим, что здесь $lM = -\left(-k_\upsilon^1\right)^{1/2} < 0$, а функцию (20) можно рассматривать как результат сложения двух затухающих колебаний с частотами $lMt\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$. В левой и правой частях возмущенной области решение (19) можно представить как суперпозицию двух бегущих волн:

$$\tau^{\mp}(x', t) = C_1\exp[2l(x' \pm t)]\left(\sin\alpha_1^{\mp} - \sin\beta_1^{\mp}\right)/2,\ x'l \ge 0,\ t \ge 0; \tag{21}$$

$$\alpha_1^{\mp} = l\left[x'\left(1 + \sqrt{2}\right) \pm t\left(\sqrt{2} - 1\right)\right] + \varphi_1,\ \beta_1^{\mp} = l\left[x'\left(1 - \sqrt{2}\right) \mp t\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] - \varphi_1. \tag{22}$$

Волновым переменным (22) соответствуют скорости перемещения волн

$$N_1^{\mp} = \pm w\left(1-\sqrt{2}\right)/\left(1+\sqrt{2}\right),\ N_2^{\mp} = \pm w\left(1+\sqrt{2}\right)/\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Ясно, что $N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2$. Другой вариант физического истолкования решения (19) связан с распадом слабого разрыва:

$$\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \exp\left[2lx'\frac{(\delta_1 - 1)}{\delta_1}\right]\sin\left[\varphi_1 + lx'\frac{(\delta_1 - 1)\sqrt{2}}{\delta_1}\right]\cos\left[lx'\frac{(1+\delta_1)}{\delta_1}\right],$$

$$lx' \geq 0,\ x' \in (-\infty,\infty),\ 0 < \delta_1 < 1.$$



Этот неоднородный фон при $\delta_1 = 1-0$ представляет биения по $x'$ с затухающей по экспоненте амплитудой. Решение (19) описывает тепловое состояние среды между разбегающимися дозвуковыми волнами $x' = \mp\delta_1 t$. При $\delta_1 = 1$ исходное тепловое поле не имеет слабого разрыва.

Значение $M^2 = 17/15$ дает корни $z_{1,2} = \pm 2il/\sqrt{5}$, и в результате вычислений получаем решение для левой ($x' \leq 0$, $l < 0$) и правой ($x' \geq 0$, $l > 0$) частей координатной оси:

$$\tau^{\mp} = C_1 \sin\left[2l\left(x' + M_1^{\mp} t\right)/\sqrt{5} + \varphi_1\right]\cos\left[l\left(x' - M_1^{\mp} t\right)\right], \tag{23}$$

$$M_1^{\mp} = \mp(17/15)^{1/2};\ C_1, \varphi_1 - \text{const}.$$

В начальном состоянии ($t = 0$) тепловое поле непрерывное, и в точке $x' = 0$ находится слабый разрыв температуры:

$$\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \sin\left[\left(4lx'/\sqrt{5}\right) + \varphi_1\right],\ lx' \geq 0. \tag{24}$$

В последующие моменты времени слабый разрыв распадается на две волны $x' = M_1^{\mp} t$, бегущие в разные стороны по фону (24). В возмущенной области для левой и правой полуосей решение (23) можно записать как суперпозицию двух бегущих волн:

$$\tau^{\mp} = C_1\left(\sin\alpha_1^{\mp} + \cos\beta_1^{\mp}\right),$$

$$\alpha_1^{\mp} = l\left[x'\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + M_1^{\mp} t\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1\right)\right] + \varphi_1,$$

$$\beta_1^{\mp} = l\left[x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1\right) + M_1^{\mp} t\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] + \varphi_1.$$

Этим волновым переменным соответствуют скорости перемещения волн

$$N_1^{\mp} = wM_1^{\mp}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\Big/\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ N_2^{\mp} = wM_1^{\mp}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\Big/\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Следовательно, $N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2 M_1^2 = 17w^2/15$.

Вместо фона (24) можно рассмотреть (см. (23)) пространственно-периодическую неоднородность вида

$$\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \sin\left\{\left[2lx'(1+\delta_1)/\left(\delta_1\sqrt{5}\right)\right] + \varphi_1\right\}\cos\left[lx'(\delta_1 - 1)/\delta_1\right],$$

$$lx' \geq 0,\ \delta_1 > 1.$$

Этот вариант интересен тем, что при $\delta_1 = 1 + 0$ имеем режим биений фона по координате $x'$. Слабый разрыв инициирует две разбегающиеся волны $x' = \delta_1 M_1^{\mp} t$, которые являются дозвуковыми при $\delta_1^2 < (15/17)$; пороговое значение $\delta_1^2 = (15/17)$ определяет звуковые волны возмущения; при $\delta_1^2 > (15/17)$ получаем распад на две сверхзвуковые волны. Значение $\delta_1 = 1$ дает фон (24).

В случае $M^2 = 1/3$ решение строим на основе характеристических корней $z_{1,2} = l\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)/a_3$, $a_3 = 3^{1/3}$. Для левой ($x' \leq 0$, $l < 0$) и правой ($x' \geq 0$, $l > 0$) частей оси получаем

$$\tau^{\mp} = C_1 \exp\left[-\frac{l}{a_3}(x' \pm M_2 t)\right]\sin\left[\varphi_1 - l\sqrt{a_3}(x' \pm M_2 t)\right]\cos\left[l(x' \mp M_2 t)\right], \qquad (25)$$

$$M_2 = 1/\sqrt{3};\ C_1, \varphi_1 - \text{const}.$$

Укажем запись решения (25) в виде суперпозиции двух бегущих волн:

$$\tau^{\mp} = C_1 \exp\left[-\frac{l}{a_3}(x' \pm M_2 t)\right]\left[\sin\alpha_1^{\mp} + \cos\beta_1^{\mp}\right]/2,$$

$$\alpha_1^{\mp} = \varphi_1 + lx'\left(1 - \sqrt{a_3}\right) \mp lM_2 t\left(1 + \sqrt{a_3}\right),$$

$$\beta_1^{\mp} = \varphi_1 - lx'\left(1 + \sqrt{a_3}\right) \pm lM_2 t\left(1 - \sqrt{a_3}\right).$$

Скорости распространения этих волн обладают свойством

$$N_1^- N_2^- = N_1^+ N_2^+ = w^2 M_2^2 = w^2/3.$$

Физическая модель решения (25): две волны возмущения $x' = \mp\delta_1 M_2 t$, $0 < \delta_1 < 1$, образовавшиеся в результате распада слабого разрыва, движутся с дозвуковыми скоростями по пространственно-периодическому фону

$$\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \exp\left[\frac{lx'(1-\delta_1)}{a_3\delta_1}\right]\sin\left[\varphi_1 + lx'\frac{(1-\delta_1)\sqrt{a_3}}{\delta_1}\right]\cos\left[lx'\frac{(1+\delta_1)}{\delta_1}\right],$$

$$lx' \leq 0,\ x' \in (-\infty, \infty).$$

Здесь при $\delta_1 = 1 - 0$ имеем режим биения по $x'$ с затухающей по экспоненте амплитудой. Если $\delta_1 = 1$, то в начальном состоянии слабый разрыв отсутствует: $\tau_0^{\mp}(x') = C_1 \sin\varphi_1 \cos(2lx')$ — и появление разбегающихся волн обусловлено воздействием температуры $\tau(x' = 0, t)$, которая есть результат сложения двух затухающих колебаний с частотами $lM_2\left(1 \pm \sqrt{a_3}\right)$, см. (25).

Качественные свойства полученных решений представлены в таблице 2.



*Таблица 2*

**Bio-источник: точные решения уравнения (3), (4) при ε>0, $k_\upsilon^1 < 0$**

| Значение параметра $M^2 = -\varepsilon\chi^2 k_\upsilon^1$ | Волновой процесс и его свойства |
|---|---|
| $M^2 = 1$ | Решение (19) — суперпозиция двух бегущих волн, скорости перемещения которых обладают свойством $N_1 N_2 = w^2$. Возмущенная область расположена между разбегающимися волнами $x' = \mp\delta_1 t$. При $\delta_1 \in (0,1)$ эти дозвуковые волны есть результат распада слабого разрыва. Пример неоднородного фона — биения по координате с затухающей амплитудой. При $\delta_1 = 1$ слабый разрыв отсутствует, и волны возмущения — звуковые |
| $M^2 = 17/15$ | Решение (23) — суперпозиция двух бегущих волн; их скорости перемещения удовлетворяют соотношению $N_1 N_2 = 17w^2/15$. При распаде слабого разрыва появляются две волны, разбегающиеся с дозвуковой, звуковой либо сверхзвуковой скоростью. Пример неоднородного фона — биения по координате |
| $M^2 = 1/3$ | Решение (25) — суперпозиция двух бегущих волн, для которых $N_1 N_2 = w^2/3$. Слабый разрыв распадается на две звуковые волны $x' = \mp\delta_1 t/\sqrt{3}$, $\delta_1 \in (0,1)$. Пример неоднородного фона — биения по координате с затухающей амплитудой |
| Основной результат: $(N_1 N_2)/w^2 = M^2 = -\varepsilon\chi^2 k_\upsilon^1$ | |

## Формирование стоячей волны

Решение нелокального уравнения (3), (4) представим в виде

$$\tau = \tau_1 \cos\omega E + \tau_2 \sin\omega E, \ \omega \equiv \text{const}, \tag{26}$$

$$\tau_1(\alpha, E) = g_1(E)\cos k_0\alpha + h_1(E)\sin k_0\alpha,$$

$$\tau_2(\alpha, E) = g_2(E)\cos k_0\alpha + h_2(E)\sin k_0\alpha,$$

$$\alpha = x' + Mt, \ E = \exp(rt), r < 0, \ t \geq 0.$$

Эти выражения содержат сходящиеся ряды

$$g_1 = a_0 + a_\delta E^\delta,\ h_1 = b_0 + b_\delta E^\delta,\ g_2 = u_0 + u_\delta E^\delta,\ h_2 = v_0 + v_\delta E^\delta,$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{n+1} u_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!,\ a_{2n+2} = (-1)^{n+1} a_0 \omega^{2n+2} / (2n+2)!,$$

$$b_{2n+1} = (-1)^{n+1} v_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!,\ b_{2n+2} = (-1)^{n+1} b_0 \omega^{2n+2} / (2n+2)!,$$

$$u_{2n+1} = (-1)^{n+2} a_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!,\ u_{2n} = (-1)^{n} u_0 \omega^{2n} / (2n)!,$$

$$v_{2n+1} = (-1)^{n+2} b_0 \omega^{2n+1} / (2n+1)!,\ v_{2n} = (-1)^{n} v_0 \omega^{2n} / (2n)!;$$



$$\delta = 1,2,3,\ldots;\ n = 0,1,2,\ldots.$$

Здесь $a_0$, $b_0$, $u_0$, $v_0$ — произвольные постоянные; повторяющийся индекс $\delta$ означает суммирование. Данное построение выполнено при следующих двух связях между параметрами задачи $r$, $k_0$:

$$\varepsilon\chi^2 k_0^4 + (M^2 - 1)k_0^2 + k_\upsilon^1 = 0,\ r = 2k_0 M < 0.$$

Отсюда находим

$$\left(k_0^2\right)_{1,2} = \left[1 - M^2 \pm \sqrt{\left(1 - M^2\right)^2 - 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2}\right] \Big/ \left(2\varepsilon\chi^2\right). \qquad (27)$$

Решение (26) существует, если правая часть выражения (27) положительная. Обращаем внимание на то, что $M$ и $k_0$ входят сюда четным образом.

Обсудим примеры. Для $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon < 0$ и $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon > 0$ нужно взять в (27), соответственно, «минус» и «плюс». Оба эти варианта дают решение независимо от величины $M^2$ для дозвукового и сверхзвукового процессов. Если $k_\upsilon^1 \varepsilon > 0$, то необходимо иметь $\left(1 - M^2\right)^2 > 4k_\upsilon^1 \varepsilon\chi^2$. Решение существует и содержит две частоты $(k_0)_{1,2}$, соответствующие двум положительным корням $\left(k_0^2\right)_{1,2}$. Если при $k_\upsilon^1 > 0$, $\varepsilon > 0$ имеем дозвуковой процесс, $M^2 < 1$ либо, если при $k_\upsilon^1 < 0$, $\varepsilon < 0$ имеем сверхзвуковой процесс, $M^2 > 1$.

Нужное нам решение получаем суперпозицией двух функций вида (26): $\tau = \tau^+ + \tau^-$. Первая часть решения $\tau^+$ записывается на основе (26) при $M < 0$, $k_0 > 0$, то есть линия $\alpha^+ = 0$ есть волна, бегущая вправо, в сторону $x' > 0$, $x'_w = t|M|$; вторая часть решения $\tau^-$ получается при $M > 0$, $k_0 < 0$ и содержит волну $\alpha^- = 0$, бегущую влево, в сторону $x' < 0$, $x'_w = -t|M|$. В начальный момент времени $t = 0$ в точке $x' = 0$ находится слабый разрыв теплового поля, разделяющий неоднородные по координате $x'$ температурные поля $\tau_l^0(x')$, $x' \le 0$ и $\tau_r^0(x')$, $x' \ge 0$. При $t > 0$

этот слабый разрыв распадается на две волны, бегущие в разные стороны: $x'_w = \mp t|M|$, $t \ge 0$. Тепловой фон перед волнами определяется зависимостями

$$\tau_l^0(x') = \tau^+\left(\alpha = 2x', E = E_l^0(x')\right) + \tau^-\left(\alpha = 0, E = E_l^0(x')\right),\ x' \le 0;$$

$$\tau_r^0(x') = \tau^+\left(\alpha = 0, E = E_r^0(x')\right) + \tau^-\left(\alpha = 2x', E = E_r^0(x')\right),\ x' \ge 0;$$

$$E_l^0(x') = \exp\left(-rx'/|M|\right),\ E_r^0(x') = \exp\left(rx'/|M|\right).$$



Решение $\tau = \tau^+ + \tau^-$ характеризует состояние среды между разбегающимися волнами. В ходе установления по времени $(t \to \infty, E \to 0)$ получаем стоячую волну $\tau = a_0^+ \cos[k_0(x'+tM)] + a_0^- \cos[k_0(x'-tM)]$; $k_\upsilon^1 \varepsilon < 0$. Если $k_\upsilon^1 \varepsilon > 0$ и исходное решение содержит две частоты $(k_0)_1$ и $(k_0)_2$, то при $t \to \infty$ получаем суперпозицию двух стоячих волн вида $\cos[(k_0)_1(x' \pm tM)]$, $\cos[(k_0)_2(x' \pm tM)]$. Таким образом, решение $\tau = \tau^+ + \tau^-$ описывает при $t \ge 0$ состояние, предшествующее выходу температуры на режим стоячей волны.

## Заключение

Получены точные частные решения нелокального волнового уравнения (3) при положительном и отрицательном наклоне $dk_\upsilon/d\tau$ функции источника (4). Эти результаты представлены в таблицах 1 и 2. Построен пример (26) распада слабого разрыва, дающий в установившемся во времени $(t \to \infty)$ состоянии стоячую волну.

## Список литературы


1. *Никитенко Н.И.* Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73, №4. С. 851—859.
2. *Глазунов Ю.Т.* Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40, №1. С. 134—138.
3. *Яворский Н.И.* Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. №3. С. 3—10.
4. *Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J.* Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin ; Heidelberg, 2001.
5. *Алфимов Г.А.* Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, №4. С. 585—602.
6. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
7. *Мамчуев М.О.* Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественнонаучная сер. 2014. №7. С. 45—59.

8. *Керефов М.А., Геккиева С.Х.* Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2016. №4. С. 76—86.

9. *Дрегля А.И., Сидоров Н.А.* Идентификация динамики внешней силы при моделировании колебаний // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2017. Т. 19. С. 105—112.

10. *Pennes H.H.* Analysis of tissue and arterial temperature in the resting human forearm // Journal of Appl. Phisiol. 1948. Vol. 1. P. 93—122.

11. *Tung M.M., Trujillo M., Lopez Molina J.A. et al.* Modelling the heating of biological tissue based on the hyperbolic heat transfer equation // Mathematical and Computer Modelling. 2009. Vol. 50. P. 665—672.

12. *Ching-yu Y.* Boundary estimation of hyperbolic bio-heat conduction // Int. J. Heat Mass Transfer. 2011. Vol. 54. 2506—2513.

13. *Lin S.-Y., Chou T.-M.* Numerical analysis of the Pennes bioheat transfer equation on skin surface // Third Int. Conf. of Robot, Vision and Signal Processing. 2015. P. 71—74.

14. *Mochnacki B., Ciesielski M., Piasecka-Belhayat A.* Numerical solution of the bioheat transfer equation with uncertain parameters using the sensitivity analysis method // Defect and Diffusion Forum. 2017. Vol. 379. P. 39—47.

15. *Шабловский О.Н.* Колебания, резонансы и волны в нелокальной среде с источниками // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. №4. С. 5—14.



**Об авторе**

Олег Никифорович Шабловский — д-р физ.-мат. наук, проф., Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Республика Беларусь.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

**The author**

Prof. Oleg N. Shablovsky, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus.

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru