УДК 514.75

Н. А. Кузьмина

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СЕТИ НА ПОВЕРХНОСТИ КАРТАНА

Изучается двойственная геометрия сопряженной сети Σ_m на поверхности Картана V_m в проективном пространстве P_{2m}. Исследования проводятся инвариантными методами дифференциально-геометрических исследований, а именно методом внешних дифференциальных форм Э. Картана [7] и теоретико-групповым методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [3].

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{J}, \bar{K} = \overline{0, 2m};\ i,\ j,\ k,\ l,\ s = \overline{1, m};$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = \overline{m+1, 2m};\ u, v, w = \overline{m+1, 2m-1}.$$

В $2m$-мерном $(m \geq 2)$ проективном пространстве P_{2m} рассмотрим поверхность Картана V_m [9], дифференциальные уравнения которой в репере первого порядка $R = \{A_{\bar{J}}\}$ имеют вид $\omega_0^\alpha = 0$. Продолжая эти уравнения, имеем $\omega_i^\alpha = \Lambda_{ik}^\alpha \omega_0^k$, $\Lambda_{[ik]}^\alpha = 0$. Дальнейшее продолжение уравнений приводит к следующим дифференциальным уравнениям

$$d\Lambda_{ik}^\alpha + \Lambda_{ik}^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_{is}^\alpha \omega_k^s - \Lambda_{sk}^\alpha \omega_i^s + \Lambda_{ik}^\alpha \omega_0^0 = \Lambda_{iks}^\alpha \omega_0^s; \qquad (1)$$

здесь функции Λ_{iks}^α симметричны по каждой паре нижних индексов.

В репере, отнесенном к сопряженной сети Σ_m на поверхности Картана V_m, справедливо

$$\Lambda_{ij}^{\alpha} = 0\,,\; \Lambda_{ss}^{\alpha}\Lambda_{\beta}^{ss} = \delta_{\beta}^{\alpha}\,,\; \Lambda_{ii}^{\gamma}\Lambda_{\gamma}^{kk} = \delta_{i}^{k}\,, i \neq j\,. \qquad (2)$$

В выбранном репере второго порядка уравнения сети Σ_m имеют вид [1]:

$$\omega_i^j = a_{ik}^{\,j}\omega_0^k\,,\; a_{ik}^j = -\Lambda_{\gamma}^{\,ij}\Lambda_{jik}^{\gamma}\,,\; i \neq j\,. \qquad (3)$$

В работе построен тензор b_α третьего порядка:

$$db_\alpha - b_\gamma\omega_\alpha^\gamma + b_\alpha\omega_0^0 = b_{\alpha k}\omega_0^k\,.$$

Инвариантная гиперплоскость Π_{2m-1}, уравнение которой имеет вид $b_\alpha x^\alpha = 0$, содержит касательную плоскость $\mathrm{T}_m(A_0)$ к поверхности Картана V_m в P_{2m}. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Поверхность Картана V_m в P_{2m} в третьей дифференциальной окрестности внутренним образом порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу H_m, для которой данная поверхность Картана V_m является базисной.*

Такую гиперполосу назовем *гиперполосой Картана H_m, ассоциированной с поверхностью V_m* в P_{2m}.

В предположении $A_{2m} \notin \Pi_{2m-1}$ (что равносильно соотношению $b_{2m} \neq 0$) ассоциированная гиперполоса Картана H_m регулярна [2] (т.е. (m–1)-мерная характеристика Π_{m-1} главной касательной гиперплоскости Π_{2m-1} и касательная плоскость $\mathrm{T}_m(A_0)$ поверхности Картана имеют лишь одну общую точку A_0) тогда и только тогда, когда тензор третьего порядка $\mathrm{M}_{ik}^{2m} = \dfrac{1}{b_{2m}} b_\alpha \Lambda_{ik}^\alpha$ невырожден; ниже предполагается невырожденность этого тензора.

В репере $\widetilde{R} = \{B_{\overline{K}}\}$ четвертого порядка, где $B_0 \equiv A_0$, $B_i \equiv A_i$, $B_u = A_u - \dfrac{b_u}{b_{2m}} A_{2m}$, $B_{2m} \equiv A_{2m}$, дифференциальные уравнения регулярной ассоциированной гиперполосы Картана H_m в P_{2m} запишутся в виде [5]:

$$\Omega_0^\alpha = 0,\ \Omega_v^{2m} = 0,\ \Omega_i^{2m} = \mathrm{M}_{ik}^{2m}\,\Omega_0^k,\ \Omega_i^u = \mathrm{M}_{ik}^u\,\Omega_0^k,\ \Omega_v^i = \mathrm{N}_{vk}^i\,\Omega_0^k. \qquad (4)$$

Продолжая уравнения системы (4), в частности, имеем

$$d\,\mathrm{M}_{ik}^{2m} - \mathrm{M}_{is}^{2m}\,\Omega_k^s - \mathrm{M}_{sk}^{2m}\,\Omega_i^s + \mathrm{M}_{ik}^{2m}\left(\Omega_{2m}^{2m} + \Omega_0^0\right) = \mathrm{M}_{iks}^{2m}\,\Omega_0^s. \qquad (5)$$

Отметим, что: 1) совокупность функций $\left\{\mathrm{M}_{ik}^{2m}\right\}$ образует тензор третьего порядка, симметричный по индексам *i*, *k*; 2) функции M_{iks}^{2m} симметричны по нижним индексам.

В работе доказана

Теорема 2. *Ассоциированная регулярная гиперполоса Картана* H_m *в* P_{2m} *в шестой дифференциальной окрестности индуцирует*:

1) *проективное пространство* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}(H_m)$, *двойственное исходному пространству* $\mathrm{P}_{2m}(H_m)$ *относительно инволютивного преобразования* $J:\Omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} \to \overline{\Omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ *структурных форм Пфаффа*;

2) *многообразие* $\overline{H}_m$ *в* $\overline{\mathrm{P}}_{2m}$, *двойственное исходному, причем его дифференциальные уравнения в тангенциальном репере* $\left\{\xi_{\bar{J}}\right\}$ *имеют вид, аналогичный уравнениям* (4) *гиперполосы* H_m.

Таким образом, двойственность ассоциированной гиперполосы H_m в P_{2m} влечет за собой двойственность геометрии исходной поверхности Картана V_m в P_{2m}, являющейся базисной для H_m.

Пусть гиперполоса Картана H_m, а следовательно, поверхность Картана V_m в P_{2m}, нормализована в смысле Нордена — Чакмазяна [4; 8] полями квазитензоров v_{2m}^i, v_i^0:

$$dv_{2m}^i + v_{2m}^k\Omega_k^i - v_{2m}^i\Omega_{2m}^{2m} + \Omega_{2m}^i = v_{2m,k}^i\Omega_0^k, \qquad (6)$$

$$dv_i^0 + v_i^0\Omega_0^0 - v_k^0\Omega_i^k + \Omega_i^0 = v_{ik}^0\Omega_0^k. \qquad (7)$$

На нормализованной поверхности Картана V_m в P_{2m} индуцируется аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$ без кручения, определяемая системой форм $\left\{\overset{1}{\Theta}{}^i_0, \overset{1}{\Theta}{}^i_k\right\}$, слоевые формы соответствующего пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{m,m}$ имеют строение [5]:

$$\overset{1}{\Theta}{}^i_0 = \Omega^i_0, \ \overset{1}{\Theta}{}^i_k = \Omega^i_k - \nu^i_{2m}\Omega^{2m}_k - \delta^i_k\left(\Omega^0_0 - \nu^0_s\Omega^s_0\right) + \nu^0_k\Omega^i_0. \quad (8)$$

В силу двойственности нормализованной ассоциированной регулярной гиперполосы Картана H_m система форм $\left\{\overset{2}{\Theta}{}^i_0, \overset{2}{\Theta}{}^i_k\right\}$ строения (8), где входящие в них формы Ω и функции пишутся с черточкой сверху, определяет вторую аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$ без кручения; соответствующее пространство аффинной связности обозначим через $\overset{2}{A}_{m,m}$. Доказана

Теорема 3. *На поверхности Картана V_m в P_{2m}, нормализованной в смысле Нордена — Чакмазяна, индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения.*

Так как репер $\widetilde{R}$ отнесен к сопряженной сети Σ_m на поверхности Картана V_m в P_{2m}, то в силу соотношений (2) справедливо $M^{2m}_{ij} = 0, i \neq j$. Уравнения сети Σ_m на V_m в репере $\widetilde{R}$ записываются в виде:

$$\Omega^j_i = a^j_{ik}\Omega^k_0, \ i \neq j. \quad (9)$$

Уравнения «тангенциальной сети» $\overline{\Sigma}_m$, двойственной исходной $\Sigma_m \subset V_m$, в тангенциальном репере $\{\xi_{\bar{J}}\}$ имеют вид:

$$\overline{\Omega}^j_i = \overline{a}^j_{ik}\overline{\Omega}^k_0, \ i \neq j, \quad (10)$$

где

$$\overline{a}^j_{ik} = a^j_{ik} + M^{jj}_{2m}M^{2m}_{jik}, \ i \neq j. \quad (11)$$

Согласно работе [1], на любой касательной B_0B_i к i-й линии сети Σ_m на поверхности Картана V_m в P_{2m} имеются точки

$$F_i^j = -a_{ij}^j B_0 + B_i, \ i \neq j; \qquad (12)$$

В.Т. Базылевым [1] они названы *псевдофокусами* касательных к линиям сети $\Sigma_m \subset V_m$.

Для «тангенциальной ткани» $\overline{\Sigma}_m$ образы η_i^j, двойственные псевдофокусам F_i^j и определяемые сопряженной сетью $\Sigma_m \subset V_m$, имеют строение

$$\eta_i^j = \mathrm{M}_{2m}^{jj} \mathrm{M}_{ii}^{2m} a_{jj}^i \xi_0 + \xi_i, \, i \neq j; \qquad (13)$$

они называются [5] псевдофокальными гиперплоскостями.

Справедлива

Теорема 4. *Двойственные поля* m*-мерных и* $(m-1)$*-мерных гармонических плоскостей, определяемых, соответственно, полями квазитензоров* $q_{2m}^i \stackrel{def}{=} \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} a_{jj}^i \mathrm{M}_{2m}^{jj}$, $q_i^0 = -\frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} a_{ij}^j$ *на поверхности Картана* V_m *в* P_{2m} *в третьей дифференциальной окрестности задают двойственную внутренним образом определенную нормализацию поверхности* V_m.

Определение. *Сопряженную сеть* Σ_m *на поверхности Картана* V_m *в* P_{2m} *назовем геодезической первого (второго) рода, если все направления касательных* $B_0 B_i$ *к ее линиям переносятся параллельно вдоль соответствующих линий* Ω_0^i *в аффинной связности* $\overset{1}{\nabla}$ *(*$\overset{2}{\nabla}$*) пространства* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ *(*$\overset{2}{\mathrm{A}}_{m,m}$*).*

Определение. *Сопряженную сеть* $\Sigma_m \subset V_m$ *назовем чебышевской первого (второго) рода, если все направления касательных* $B_0 B_i$ *к ее линиям переносятся параллельно вдоль любой другой линии сети в аффинной связности* $\overset{1}{\nabla}$ *(*$\overset{2}{\nabla}$*) пространства* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ *(*$\overset{2}{\mathrm{A}}_{m,m}$*).*

Аналитически условие геодезичности первого или второго рода сопряженной сети Σ_m записывается, соответственно, в виде:

$$a_{ii}^{j} - \nu_{2m}^{j}\,\mathrm{M}_{ii}^{2m} = 0,\ i \neq j\ , \tag{14, а}$$

$$a_{ij}^{j} + \nu_{i}^{0} = 0,\ i \neq j\ . \tag{14, б}$$

Сопряженная сеть на поверхности Картана является чебышевской первого или второго рода тогда и только тогда, когда справедливы соответственно условия

$$a_{il}^{j} + \delta_{l}^{j}\nu_{i}^{0} = 0,\ i \neq j, l\ , \tag{15, а}$$

$$a_{jl}^{i}\,\mathrm{M}_{2m}^{jj} - \delta_{l}^{j}\nu_{2m}^{i} = 0,\ i \neq j, l\ . \tag{15, б}$$

Справедлива

Теорема 5. *Сопряженная сеть* Σ_m *на поверхности Картана* V_m *в* P_{2m} *есть сеть с совпавшими псевдофокусами* F_i^j (*с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями* η_i^j) *тогда и только тогда, когда относительно поля ее гармонических плоскостей* q_i^0 (q_{2m}^i) *она является геодезической сетью второго* (*первого*) *рода.*

Замечание 1. Из соотношений (14), (15) непосредственно следует, что сопряженная чебышевская сеть $\Sigma_m \subset V_m$ в P_{2m} первого (второго) рода является геодезической второго (первого) рода; следовательно, она принадлежит к классу сетей с совпавшими псевдофокусами F_i^j (псевдофокальными гиперплоскостями η_i^j).

Замечание 2. При $m = 2$ в четырехмерном проективном пространстве P_4 сопряженная сеть Σ_2 на поверхности Картана V_2 , нормализованной полями ее гармонических плоскостей q_4^i и q_i^0 , является чебышевской первого и второго родов одновременно, в силу замечания 1 данная сеть является также геодезической первого и второго родов.

Составим функции пятого порядка $\mathrm{M}_{vik}^{2m} \overset{def}{=} \mathrm{M}_{si}^{2m}\mathrm{N}_{vk}^{s}$, которые вместе с M_{ik}^{2m} образуют симметричный по индексам *i*, *k* тензор. Если направления касательных к линиям сети $\Sigma_m \subset V_m$ в P_{2m} попарно сопряжены относительно $2m-1$ конусов направлений $\mathrm{M}^{2m}_{ik}\,\Omega^i_0\Omega^k_0 = 0$, $\mathrm{M}^{\nu}_{ik}\,\Omega^i_0\Omega^k_0 = 0$, $\mathrm{M}^{2m}_{\nu ik}\,\Omega^i_0\Omega^k_0 = 0$, то, следуя [5], такую сеть назовем *сильно сопряженной*. Справедлива

Теорема 6. *Если поверхность Картана V_m в P_{2m} $(m > 2)$, несущая сильно сопряженную чебышевскую сеть первого и второго родов (одновременно), нормализована полями гармонических плоскостей сети, то обе внутренние геометрии пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{m,m}$ являются аффинными (локально).*

Список литературы

1. *Базылев В.Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Математика. 1966. №2. С. 9—19.
2. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. 1950. Вып. 8. С. 197—272.
3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
5. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий / Чуваш. гос. пед. ин-т. Чебоксары, 1994.
6. *Столяров А.В.* О внутренней геометрии поверхности Картана // Диф. геом. многообр. фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 111—118.
7. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1948.
8. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // ДАН АрмССР. 1959. Т. 28. №4. С. 151—157.
9. *Cartan E.* Sur les variétés de courbure constante d’un espace euclidiene or non euclidiene // Bull. Soc. Math. de France. 1919. 47. P. 125—160; 1920. 48. P. 132—208.

N. Kuzmina

DUAL GEOMETRY OF CONJUGATE NET ON CARTAN’S SURFACE

Dual geometry of conjugate net on Cartan’s surface in the 2*m*-dimensional projective space is considered.