УДК 514.76

# О ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛИСИСТЕМАХ С АБЕЛЕВОЙ ГРУППОЙ УПРАВЛЕНИЯ

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

В работе [1] изучаются динамические полисистемы на многообразиях общего вида. Однако в задачах прикладного характера [2] представляют интерес и полисистемы, порожденные семейством коммутирующих векторных полей. Это приводит к изучению динамических полисистем, у которых управляющая группа абелева. В настоящей работе описывается структура орбиты такой полисистемы, порожденной конечным семейством векторных полей. Некоторые результаты при этом обобщены на случай бесконечного семейства полей.

Пусть $V$ - связное многообразие класса $C^\infty$ размерности $N$, на котором определено семейство $(X_i)_{i\in I}$ векторных полей класса $C^\infty$, такое, что скобка Ли $[X_i, X_j]=0$ для любых $i,j\in I$. Обозначим $\varphi^i_t$ однопараметрические группы диффеоморфизмов полей $X_i, i\in I$. Как известно [3], группы $\varphi^i_t$ и $\varphi^j_t$ при этом коммутируют, т.е. при любых $t,\tau\in\mathbb{R}, x\in V$ выполняется равенство

$$\varphi^i_t\circ\varphi^j_\tau(x)=\varphi^j_\tau\circ\varphi^i_t(x). \qquad (1)$$

Используем обозначения [1]. Пусть $G(I)$ - группа управления динамической полисистемы на многообразии $V$, порожденной семейством $(X_i)_{i\in I}$. Ее элементами являются конечные последовательности $s=((t_1,i_1)(t_2,i_2)\dots(t_p,i_p))$, где $t_k\in\mathbb{R}, i_k\in I$ при $1\leq k\leq p$, а $p$ - натуральное число. Действие $\pi$ группы $G(I)$ на $V$ определяется по формуле

$$\pi(s,x)=\varphi^{i_1}_{t_1}\circ\varphi^{i_2}_{t_2}\circ\dots\circ\varphi^{i_p}_{t_p}(x)$$

для любых $s=((t_1,i_1)(t_2,i_2)\dots(t_p,i_p))\in G(I)$ и $x\in V$. Для $j\in I$ и произвольного $s\in G(I)$ обозначим $\Lambda_j(s)$ - множество тех индексов $k$: $1\leq k\leq p$, для которых $i_k=j$, и положим $\chi(s)=(\sum_{k\in\Lambda_j(s)} t_k)_{j\in I}$.

Так как $s$ - конечная последовательность, то только конечное число множеств $\Lambda_j(s), j\in I$, непусто, и значит $\chi(s)\in\mathbb{R}^{(I)}$, где $\mathbb{R}^{(I)}$ - прямая сумма полей $\mathbb{R}$ вещественных чисел, рассматриваемых как векторные пространства над собой. Тем самым определено отображение $\chi: G(I) \to \mathbb{R}^{(I)}$. Ясно, что для любых $s, \sigma \in G(I)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\chi(s\sigma) = \chi(s) + \chi(\sigma), \quad \chi(\lambda \circ s) = \lambda \chi(s).$$

Зафиксируем некоторый линейный порядок $\leq$ в $I$. Пусть $t = (t_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$. Тогда только для конечного множества $J \subset I$ выполняется $t_i \neq 0$ при $i \in J$. Положим $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, причем $i_k \leq i_{k+1}$ для любого $k$: $1 \leq k \leq p-1$. Обозначим $\mu(t) = (t_{i_1}, i_1)(t_{i_2}, i_2)\ldots(t_{i_p}, i_p)$. Тем самым определено отображение $\mu: \mathbb{R}^{(I)} \to G(I)$, обладающее следующими свойствами:

1) $\chi \circ \mu$ – тождественное отображение множества $\mathbb{R}^{(I)}$ на себя;
2) $\mu(0)$ – единичный элемент группы $G(I)$;
3) $\mu(\lambda t) = \lambda \cdot \mu(t)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{(I)}$;
4) $\pi(\mu(t+\tau), x) = \pi(\mu(t), \pi(\mu(\tau), x))$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^{(I)}$, $\forall x \in V$;
5) $\pi(s, x) = \pi(\mu(\chi(s)), x)$, $\forall s \in G(I)$, $\forall x \in V$.

Первые три свойства очевидны. Свойства 4) и 5) вытекают из условия (I).

Для $t \in \mathbb{R}^{(I)}, x \in V$ обозначим $\hat{\pi}(t, x) = \pi(\mu(t), x)$. Предыдущие свойства говорят о том, что отображение $\hat{\pi}: \mathbb{R}^{(I)} \times V \to V$ определяет действие аддитивной группы $\mathbb{R}^{(I)}$ на многообразии $V$, такое, что $\pi(s, x) = \hat{\pi}(\chi(s), x)$ для любых $s \in G(I), x \in V$. Согласно [1] топология орбиты $G(I)x$ элемента $x \in V$ является финальной относительно семейства отображений

$$(t_1, t_2, \ldots, t_p) \to \pi((t_1 \cdot s_1\, t_2 \cdot s_2 \ldots t_p \cdot s_p), x), \qquad (2)$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_p \in G(I), p \in \mathbb{N}$. Ясно, что в силу условия (I) всякое отображение (2) можно представить как композицию $\pi(\mu \circ L, x)$ линейного отображения $L: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{(I)}$, отображения $\mu: \mathbb{R}^{(I)} \to G(I)$ и отображения $s \to \pi(s, x)$. Его можно также представить, как композицию $\hat{\pi}(L, x)$ линейного отображения $L: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{(I)}$ и отображения $t \to \hat{\pi}(t, x)$. Рассматривая в $\mathbb{R}^{(I)}$ сильнейшую локально выпуклую топологию [4], получаем, что топология орбиты $G(I)x$ точки $x$ есть образ указанной топологии $\mathbb{R}^{(I)}$ относительно отображения $t \to \hat{\pi}(t, x)$.

Если определить топологию на $G(I)$ как в [1], то отображение $\mu: \mathbb{R}^{(I)} \to G(I)$ является непрерывным. Если $\pi$ – непрерывное действие $G(I)$ на $V$, то при этом $\hat{\pi}$ – непрерывное действие $\mathbb{R}^{(I)}$ на $V$. Таким образом, в случае коммутирующих векторных полей на $V$ в качестве управляющей группы динамической полисистемы на многообразии можно рассматривать аддитивную группу $\mathbb{R}^{(I)}$, наделенную сильнейшей локально выпуклой топологией.



Обозначим $\hat{\pi}_x$ – частное отображение $t \to \hat{\pi}(t, x)$. Рассматривая непрерывное действие $\pi$, получаем, что отображение $\hat{\pi}_x$ пространства $\mathbb{R}^{(I)}$, наделенное упомянутой ранее топологией, на орбиту $G(I)x$, наделенную топологией, индуцированной топологией многообразия $V$, непрерывно. Обозначим $St(x)$ – стабилизатор точки $x \in V$ в $\mathbb{R}^{(I)}$. Так как $St(x) = \hat{\pi}_x^{-1}(x)$, а одноточечное множество $\{x\} \subset V$ замкнуто, то $St(x)$ – замкнутая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}^{(I)}$.

1) Рассмотрим случай конечного множества $I$. Для определенности будем считать, что $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае $\mathbb{R}^{(I)} = \mathbb{R}^n$ и топология $\mathbb{R}^n$ – обычная евклидова. Согласно [5] $St(x)$ представляет собой произведение $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$, где $p$ и $q$ – натуральные числа, такие, что $0 \leq p+q \leq n$. Рассматривая топологию орбиты $G(I)x$, являющуюся образом топологии $\mathbb{R}^n$ при сюръективном отображении $\hat{\pi}_x$, получаем согласно [5], что $G(I)x$ является произведением $\mathbb{R}^{n-p-q} \times T^q$, где $T^q$ – $q$-мерный тор.

Изучим случай бесконечного $I$. Согласно [4] пространство $\mathbb{R}^{(I)}$ отделимо. Значит дискретные аддитивные подгруппы $\mathbb{R}^{(I)}$ замкнуты. Рассмотрим случай $I = \mathbb{N}$.

П р е д л о ж е н и е 1. Всякая дискретная подгруппа $G$ аддитивной группы $\mathbb{R}^{(I)}$ порождается над $\mathbb{Z}$ множеством линейно независимых над $\mathbb{R}$ элементов $a_i \in G, i \in J \subset I$ и изоморфна $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Обозначим $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$ – подпространство в $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, порожденное множеством $G$. Согласно [6] существует базис $(e_i)_{i \in J}$ подпространства $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$, все элементы которого принадлежат $G$; при этом можно считать, что $J \subset \mathbb{N}$. Пусть $\varphi: \langle G \rangle_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{(J)}$ – изоморфизм (алгебраический), такой, что $(\varphi(e_i))_{i \in J}$ – канонический базис пространства $\mathbb{R}^{(J)}$. Согласно [4] подпространство $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$ наследует сильнейшую локально выпуклую топологию и тогда $\varphi$ – гомеоморфизм. Значит, достаточно считать, что $\langle G \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{(J)}$ и все элементы $e_i, i \in J$ канонического базиса $\mathbb{R}^{(J)}$ принадлежат $G$. Если $J$ – конечное множество, то, как было отмечено, $\mathbb{R}^{(J)} = \mathbb{R}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и все сводится к [5].

2) Рассмотрим случай, когда $J$ счетно. Можно считать, что $J = \mathbb{N}$. Будем обозначать $M_n$ – подпространство пространства $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, порожденное элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При этом $M_n$ изоморфно в алгебраическом и топологическом смысле пространс-

тву $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует базис $(a_i^{(n)})_{1 \le i \le n}$ пространства $M_n$, такой, что:

а) $a_i^{(n)} \in G$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

б) группа $G \cap M_n$ порождается семейством $(a_i^{(n)})_{1 \le i \le n}$ над $\mathbb{Z}$;

в) $a_i^{(n)} = a_i^{(n+1)}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для $n = 0$ в качестве базиса можно взять пустое семейство $(a_i^{(0)})_{i \in \varnothing}$, которое, очевидно, обладает свойствами а), б), в).

3) Предположим, что утверждение доказано для натурального $n$. Установим его для $n+1$. Обозначим

$$P_{n+1} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{n+1} \;\Big|\; 0 \le \lambda_i < 1,\ 1 \le i \le n,\ 0 \le \lambda_{n+1} \le 1 \Big\},$$

$$P'_{n+1} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{n+1} \;\Big|\; 0 \le \lambda_i \le 2,\ 1 \le i \le n,\ 0 \le \lambda_{n+1} \le 1 \Big\}.$$

Тогда $P'_{n+1}$ – компактное подмножество в $M_{n+1}$, а $P'_{n+1} \cap G$ – его непустое (т.к. $e_{n+1} \in P'_{n+1} \cap G$) дискретное и, следовательно, конечное подмножество. Обозначим $a'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu'_i a_i + \mu_{n+1} e_{n+1}$ – такой элемент из $P'_{n+1} \cap G$, у которого $\mu_{n+1}$ минимально и $\mu_{n+1} > 0$. Положим $a_{n+1}^{(n+1)} = a'_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} [\mu'_i] \cdot a_i$, где $[\mu'_i]$ – целая часть числа $\mu'_i$. Тогда

$$a_{n+1}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\mu'_i - [\mu'_i]) a_i + \mu_{n+1} e_{n+1}.$$

Обозначим $\mu_i = \mu'_i - [\mu'_i]$ для $1 \le i \le n$. Имеем $0 \le \mu_i < 1$ для $1 \le i \le n$, а $0 < \mu_{n+1} \le 1$ по определению $a'_{n+1}$. Значит $a_{n+1}^{(n+1)} \in P_{n+1}$ и ясно, что $a_{n+1}^{(n+1)} \in G$, причем $\mu_{n+1}$ одинаково у $a'_{n+1}$ и у $a_{n+1}^{(n+1)}$.

Так как $\mu_{n+1} \ne 0$, то $a_{n+1}^{(n+1)} \notin M_n$ и значит элементы $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}, a_{n+1}^{(n+1)}$ – линейно независимы над $\mathbb{R}$ и порождают в $M_{n+1}$ подпространство размерности $n+1$, необходимо совпадающее с $M_{n+1}$. Таким образом, указанные элементы образуют базис $M_{n+1}$ над $\mathbb{R}$ и все принадлежат $G$.

Пусть $z \in G \cap M_{n+1}$. Тогда $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{(n)} + \lambda_{n+1} a_{n+1}^{(n+1)}$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n+1$. Положим

$$z_1 = z - \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i] a_i^{(n)} - [\lambda_{n+1}] a_{n+1}^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - [\lambda_i]) a_i^{(n)} + (\lambda_{n+1} - [\lambda_{n+1}]) a_{n+1}^{(n+1)}.$$

Обозначим $\eta_i = \lambda_i - [\lambda_i]$ для $1 \le i \le n+1$. Тогда $0 \le \eta_i < 1$ при всех $i$ и, значит, $z_1 \in G \cap M_{n+1}$. Далее

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_i^{(n)} + \eta_{n+1} \Big( \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i^{(n)} + \mu_{n+1} e_{n+1} \Big) = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i + \eta_{n+1} \mu_i) a_i^{(n)} + \eta_{n+1} \mu_{n+1} e_{n+1}.$$

Имеем $0 \le \eta_i + \eta_{n+1} \mu_i < 2$ при $1 \le i \le n$ и $0 \le \eta_{n+1} \mu_{n+1} < \mu_{n+1} \le 1$. Это означает, что $z_1 \in G \cap P'_{n+1}$. Но так как в $G \cap P'_{n+1}$ наименьший коэффициент при $e_{n+1}$ имеют элементы $a'_{n+1}$ и $a_{n+1}^{(n+1)}$, то $\eta_{n+1} = 0$. Но тогда $z_1 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_i^{(n)} \in M_n$ и по индуктивному предположению числа



$\eta_i$ – целые, точнее, $\eta_i = 0$ для $1 \le i \le n$. Таким образом, получаем, что все $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ для $1 \le i \le n+1$. Полагая $a_i^{(n+1)} = a_i^{(n)}$ для $1 \le i \le n$, видим, что базис $(a_i^{(n+1)})_{1 \le i \le n+1}$ удовлетворяет условиям а), б), в), и утверждение для $n+1$ доказано. По индукции оно верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

4) Положим $a_i = a_i^{(i)}$ для $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – свободно над $\mathbb{R}$. Если $x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ или $x \in G$, то ясно, что $x \in M_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – базис $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ над $\mathbb{R}$ и порождает $G$ над $\mathbb{Z}$. Таким образом, утверждение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $G$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, не являющаяся дискретной. Тогда $G$ содержит некоторую прямую, проходящую через $0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – бесконечная последовательность элементов из $G$, сходящаяся к $0$ в $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $A$ – множество значений этой последовательности. Если ранг над $\mathbb{R}$ конечен, то результат следует из [5]. Допустим, что он бесконечен, т.е. существует подпоследовательность $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, состоящая из линейно независимых над $\mathbb{R}$ элементов. Обозначим $A_{\mathbb{R}}$ – подпространство пространства $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, порожденное множеством $A$. Линейное отображение, которое каждому $x_{n(k)}$ относит элемент $e_k$ канонического базиса $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ для $k \in \mathbb{N}$, есть алгебраический изоморфизм $A_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а следовательно [4], и топологический. Так как $x_{n(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, то и $e_k \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \mid |pr_i x| < \tfrac{1}{2} \ \ \forall i \in \mathbb{N} \}.$$

Легко видеть, что $U$ абсолютно выпукло и, значит, является окрестностью $0$ в $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, не содержащей ни одного $e_k$, $k \in \mathbb{N}$. Это противоречие говорит о том, что ранг $A$ над $\mathbb{R}$ все-таки конечен и результат следует из [5].

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $G$ – замкнутая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Существует наибольшее векторное подпространство $V$, содержащееся в $G$. Для всякого векторного подпространства $W$, дополнительного к $V$, $W \cap G$ дискретно. Прямая сумма подгрупп $V$ и $W \cap G$ есть $G$.

Всякое подпространство пространства $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ замкнуто [4] т.е. проходит доказательство [5]. Таким образом, всякая замкнутая подгруппа группы $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ имеет вид $G = \mathbb{R}^{(I)} \oplus \mathbb{Z}^{(J)}$, где $I, J$ – подмножества $\mathbb{N}$. Тем самым выяснена структура стабилизатора точки многообразия для динамической полисистемы, порожденной

2 Зак. 1399

счетным семейством коммутирующих векторных полей.


Библиографический список

1. Л о б р и  К. Динамические полисистемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Матем. М., 1979. Вып.14. С.134–173.

2. А л е ш н и к о в  С.И. О метриках на гладком многообразии, связанных с динамическими полисистемами специального вида // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.5–7.

3. Г о д б и й о н  К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188с.

4. Ш е ф е р  Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359с.

5. Б у р б а к и  Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969. 392с.

6. Б у р б а к и  Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 516с.




УДК 514.75

## ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННОЕ ТОЧЕЧНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ


Б.А.А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)


Построенное в работе [1] отображение $f_q$ многообразий гиперквадрик, которое порождается точечным соответствием $f: P_n \to \widehat{P}_n$ проективных пространств, обобщается для точечного отображения пространств произвольной размерности. Доказан ряд предложений, в которых устанавливается связь между свойствами отображений $f$ и $f_q$ в случае, когда $f$ является субмерсией. В частности, доказано, что отображением $f_q$ определяется характеристическая конфигурация отображения $f$ и семейство соприкасающихся гиперквадрик распределения линейных элементов, порожденного отображением $f$ .

1. Рассмотрим локальное дифференцируемое отображение $f$: $P \in P_m \mapsto p = f(P) \in \widehat{P}_n$ проективных пространств, для которого $\operatorname{rang} f = \min(m,n)$ в каждой точке области определения. Поместив вершину $R_0$ подвижного репера $R = \{\bar{R}_0, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_m\}$ пространства $P_m$ в точку $P$ области определения отображения $f$ , а вершину $r_0$ репера $r = \{\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n\}$ в точку $p = f(P)$, получаем систему дифференциальных уравнений отображения $f$ в виде:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_J \Omega^J_0 \quad (i,\dots = \overline{1,n};\ J,\dots = \overline{1,m}). \qquad (1)$$

Двукратное продолжение системы (1) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2 = \{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}\}$ второго порядка отображения $f$ , система дифференциальных уравнений которого имеет вид (4), (5) [2]. Имеем: $\operatorname{rang}[\Lambda^i_J] = \min(m,n)$.

2. Пусть $\mathcal{H}(p)$ – многообразие всех гиперквадрик $q \subset \widehat{P}_n$ , содержащих точку $p$ , для которых $p$ является неособой точкой. Уравнение гиперквадрики $q \in \mathcal{H}(p)$ имеет вид

$$a_{ij} x^i x^j + 2 a_i x^i x^0 = 0, \qquad (2)$$

причем уравнение

$$a_i x^i = 0 \qquad (3)$$

определяет плоскость, касательную к $q$ в точке $p$ .

Многообразие всех гиперквадрик $Q$ :

$$A_{JK} X^J X^K + 2 A_J X^J X^0 = 0 \qquad (4)$$

пространства $P_m$ , содержащих точку $P$ и имеющих в ней касательную гиперплоскость, обозначим символом $\mathcal{H}(P)$ . Закон изменения величин $a_i, a_{ij}, A_J, A_{JK}$ при изменении вторичных параметров имеет вид (3), (5) [1]. Имеем:

$$\dim \mathcal{H}(p) = C^2_{n+1} + n - 1, \quad \dim \mathcal{H}(P) = C^2_{m+1} + m - 1.$$

Следующее предложение доказывается так же, как предложение I статьи [1].

П р е д л о ж е н и е  1. Отображение $f: P_m \to \widehat{P}_n$ во 2-й дифференциальной окрестности каждой пары $(P, p)$ соответствующих точек порождает отображение

$$f_q: q \in \mathcal{H}(p) \longmapsto Q \in \mathcal{H}(P),$$

которое задается формулами:

$$A_J = \Lambda^i_J a_i, \qquad (5)$$

$$A_{JK} = \Lambda^i_J \Lambda^j_K a_{ij} - \Lambda^i_{JK} a_i. \qquad (6)$$