

**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов  
С. И. Корягин, И. М. Ахмедов**

## ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПОДЪЕМА ГРУЗА

91

Рассмотрена динамика механической системы с тремя степенями свободы для подъема груза.

С увеличением веса груза снижается установившаяся скорость вращения барабана, время установления изменяется незначительно. Проведен расчет частоты колебаний троса относительно вертикали. Установлено, что изменения угловых скоростей отклонений соответствуют колебаниям математического маятника с переменной длиной нити.

Уменьшение осевого момента инерции барабана при прочих равных условиях не влияет ни на установившуюся угловую скорость вращения барабана, ни на значение установившегося удлинения троса, но изменяет время переходного процесса. Однако влияет и на частоту, и на размах отклонений троса от вертикали.

Увеличение начального угла приводит только к росту наибольших отклонений троса от вертикали; увеличение аэродинамического сопротивления груза – к их уменьшению.

*A device for lifting of a cargo is modeled by a mechanical system with three degrees of freedom.*

*With the increase in the weight of the load is reduced the steady-state rotation speed of the drum, the settling time varies slightly. The calculation of the oscillation frequency of the cable relative to the vertical. It is established that change of the angular velocity deviations correspond to oscillations of mathematical pendulum with variable length strings.*

*Reducing the axial moment of inertia of the drum, ceteris paribus, affects neither the steady-state angular velocity of rotation of the drum or the value of the steady-state elongation of the cable, but changes during the transition process. However, affects the frequency and magnitude of deviations of the cable from the vertical.*

*The increase in the initial angle only leads to the growth of the largest deviations of the cable from the vertical; increase the aerodynamic drag of the cargo to its reduction.*

**Ключевые слова:** динамика, механическая система, подъем груза.

**Key words:** dynamics, mechanical system, cargo lifting.

Подъемные механизмы широко используются на практике. Поэтому исследование динамических характеристик различных подъемных механизмов является актуальной задачей [1–5]. Для моделирования

указанного процесса в простейшем случае применяют модель механической системы с одной степенью свободы: движение груза — по вертикали, канат считается нерастяжимым. В ряде работ исследовано влияние упругости троса на динамику системы. При этом, как правило, используется приближение короткого троса: величина абсолютного удлинения троса из-за растяжения  $X$  и сила натяжения считаются неизменными по длине троса. В такой постановке система имеет две степени свободы, за обобщенные координаты принимают  $X$  и угол поворота барабана  $\psi$ .

В [4] было показано влияние отклонения каната от вертикали на динамику подъема груза. В [6] выполнено исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины.

В данной статье рассмотрена динамика механической системы с тремя степенями свободы для подъема груза (рис. 1).

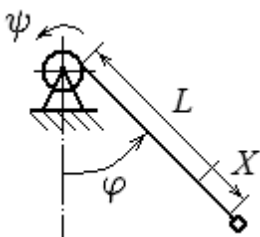


Рис. 1. Схема механической системы с тремя степенями свободы для подъема груза:

$\psi$  — угол поворота барабана;  $\varphi$  — угол отклонения троса от вертикали;  
 $X$  — абсолютное растяжение троса

Пусть масса груза равна  $m$ , коэффициент аэродинамического сопротивления груза  $\beta$ . Радиус барабана лебедки  $r_0$ , осевой момент инерции  $J$ . Полагаем, что приложенный к барабану момент зависит от угловой скорости  $\Omega$  по формуле

$$M(\Omega) = M_0 - B\Omega,$$

где  $M_0/B = \omega$  — установившаяся угловая скорость барабана на холостом ходу.

Начальная угловая скорость равна нулю. Начальная длина троса  $L_0$ . Массой троса, его силой аэродинамического сопротивления можно пренебречь. Найдем кинематический закон вращения барабана лебедки, изменение угла отклонения и длины троса по времени.

Рассматриваемая механическая система имеет три степени свободы. Такие задачи решаются с помощью уравнений Лагранжа. В качестве обобщенных координат выбраны угол поворота барабана лебедки  $\psi$ , удлинение троса  $X$ , угол отклонения троса от вертикали  $\varphi$ . Проекции абсолютной скорости движения груза найдем по формулам

$$U = \Omega r_0 - \dot{X} = \dot{\psi} r_0 - \dot{X}, \quad V = \Omega L = \dot{\varphi} (L_0 - \psi r_0 + X).$$



Составляющие силы гидродинамического сопротивления груза

$$R_x = -\beta W(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}), \quad R_y = -\beta W\dot{\phi}(L_0 - \psi r_0 + X),$$

$$W = \sqrt{\dot{\phi}^2(L_0 - \psi r_0 + X)^2 + (\dot{\psi}r_0 - \dot{X})^2}.$$

Уравнения Лагранжа, описывающие динамику механической системы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial T}{\partial X} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi. \quad (1)$$

Кинетическая энергия механической системы складывается из кинетической энергии вращающегося барабана и движущегося груза

$$T = 0,5J\dot{\psi}^2 + 0,5m((\dot{\psi}r_0 - \dot{X})^2 + \dot{\phi}^2(L_0 - \psi r_0 + X)^2).$$

Выведем слагаемые в уравнениях Лагранжа.

$$1. \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J\dot{\psi} + m(\dot{\psi}r_0 - \dot{X})r_0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = J\ddot{\psi} + m(\ddot{\psi}r_0 - \ddot{X})r_0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = -r_0\dot{\phi}^2 m(L_0 - \psi r_0 + X).$$

Дадим системе возможное перемещение:  $\delta\psi \neq 0, \delta X = 0, \delta\phi = 0$ . На этом перемещении работа внешних сил равна

$$\delta A_\psi \equiv Q_\psi \delta\psi = M\delta\psi - (R_x + mg \cos \phi)r_0 \delta\psi.$$

Откуда соответствующая обобщенная сила вычисляется по формуле

$$Q_\psi = M_0 - B\dot{\psi} - (mg \cos \phi + \beta W(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}))r_0. \quad (3)$$

$$2. \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = -m(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) = -m(\ddot{\psi}r_0 - \ddot{X}), \quad \frac{\partial T}{\partial X} = m\dot{\phi}^2(L_0 - \psi r_0 + X). \quad (4)$$

Дадим системе возможное перемещение:  $\delta\psi = 0, \delta\phi = 0, \delta X \neq 0$ .

На этом перемещении работа внешних сил равна

$$\delta A_x \equiv Q_x \delta X = (mg \cos \phi + R_x - \Theta X / L(t))\delta X.$$

Откуда обобщенная сила

$$Q_x = mg \cos \phi + \beta W(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}) - \Theta X / (L_0 - \psi r_0 + X). \quad (5)$$

$$3. \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = m\dot{\phi}(L_0 - \psi r_0 + X)^2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = m\ddot{\phi}(L_0 - \psi r_0 + X)^2 - 2m\dot{\phi}(L_0 - \psi r_0 + X)(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}). \quad (6)$$

Дадим системе возможное перемещение:  $\delta\psi = 0, \delta X = 0, \delta\phi \neq 0$ .

На этом перемещении работа внешних сил равна

$$\delta A_\phi \equiv Q_\phi \delta\phi = -(mg \sin \phi + R_y)L\delta\phi.$$



Откуда обобщенная сила

$$Q_\varphi = -(mg \sin \varphi + \beta W \dot{\varphi} (L_0 - \psi r_0 + X))(L_0 - \psi r_0 + X). \quad (7)$$

Подставляя (2)–(7) в (1), получим систему дифференциальных уравнений движения механической системы

$$J\ddot{\psi} + mr_0(\ddot{\psi}r_0 - \ddot{X} - \dot{\varphi}^2 L(t)) = M_0 - B\dot{\psi} - (mg \cos \varphi + \beta W(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}))r_0, \quad (8)$$

$$m(\ddot{X} - \ddot{\psi}r_0 + \dot{\varphi}^2 L(t)) = mg \cos \varphi + \beta W(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}) - \Theta X / L(t), \quad (9)$$

$$m\ddot{\varphi}L(t) - 2m\dot{\varphi}(\dot{\psi}r_0 - \dot{X}) = -(mg \sin \varphi + \beta W \dot{\varphi} L(t)). \quad (10)$$

94

Введем безразмерные переменные

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_*} = \frac{\Omega B}{M_0}, \quad \omega_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_*}, \quad \tau = t \frac{B}{J}, \quad u = \frac{\dot{X}}{\Omega_* r_0} = \frac{\dot{X} B}{M_0 r_0}, \quad x = \frac{X}{r_0}, \quad l = \frac{L}{r_0}. \quad (11)$$

С помощью (11) приведем систему уравнений (8)–(10) к безразмерной форме:

$$(1 + K_m) \frac{d\omega}{d\tau} - K_m \frac{du}{d\tau} - K_\varphi \omega_1^2 l = 1 - \omega - K_g \cos \varphi - K_R w(\omega - u), \quad (12)$$

$$-K_m \frac{d\omega}{d\tau} + K_m \frac{du}{d\tau} + K_\varphi \omega_1^2 l = K_g \cos \varphi + K_R w(\omega - u) - K_y \frac{x}{l}, \quad (13)$$

$$\ell_0 K_m \frac{d\omega_1}{d\tau} l + 2K_\varphi \omega_1 (u - \omega) = -K_g \sin \varphi - K_R l w \omega_1, \quad (14)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_1, \quad \frac{dx}{d\tau} = u; \quad \ell_0 = \frac{L_0}{r_0}, \quad K_\varphi = \frac{mr_0^2 M_0}{B^2}, \quad (15)$$

$$K_g = \frac{mgr_0}{M_0}, \quad K_R = \beta \frac{M_0 r_0^3}{B^2}, \quad K_m = \frac{mr_0^2}{J}, \quad K_y = \frac{\Theta r_0}{M_0}. \quad (16)$$

$$l = \ell_0 - \psi + x, \quad w = \sqrt{(u - \omega)^2 + (l\omega_1)^2}. \quad (17)$$

Преобразуем систему уравнений (12)–(17), выразив старшие производные:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = 1 - \omega - K_y \frac{x}{l}, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \omega, \quad \frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega_1, \quad (18)$$

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \omega + \frac{1}{K_m} (K_g \cos \varphi + K_R w(\omega - u) - K_\varphi \omega_1^2 l) - \frac{1 + K_m}{K_m} K_y \frac{x}{l}, \quad (19)$$

$$\frac{d\omega_1}{d\tau} = \frac{1}{K_m} \left( \frac{1}{l} (2K_\varphi \omega_1 (\omega - u) - K_g \sin \varphi) - K_R w \omega_1 \right), \quad (20)$$

$$\omega(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \omega_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (21)$$



По (18)–(21) видно, что критериями подобия задачи являются безразмерные комплексы:  $K_m, K_g, K_R, K_y, K_\varphi, \ell_0$  и  $\varphi_0$ .

Поставленная задача Коши (18)–(21) не имеет аналитического решения, может быть решена численным методом в среде Mathcad. На рисунках 2–16 показаны результаты исследования влияния критериев подобия на динамику механической системы. В качестве базового набора были приняты следующие значения:

$$K_m = 1,5; K_g = 0,3; K_R = 0,1; K_y = 30; K_\varphi = 1,8; \ell_0 = 70; \varphi_0 = 10^\circ.$$

Все графики представлены в безразмерных переменных.

На рисунках 2–8 показано влияние критерия подобия  $K_g$ :

$$1 - K_g = 0,16; 2 - K_g = 0,3; 3 - K_g = 0,5,$$

что соответствует увеличению силы тяжести груза при прочих равных условиях.

По рисунку 2 видно, что в начальном интервале движения имеет место колебательный процесс растяжения троса. Максимум  $x(\tau)$  возрастает с увеличением  $K_g$ . Через некоторое время растяжение стабилизируется, медленно уменьшаясь; при этом относительное удлинение стремится к постоянной величине (рис. 3).

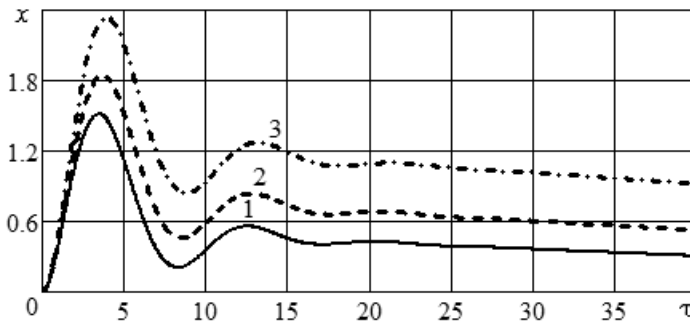


Рис. 2. Изменение абсолютного (безразмерного) удлинения троса при увеличении  $K_g$

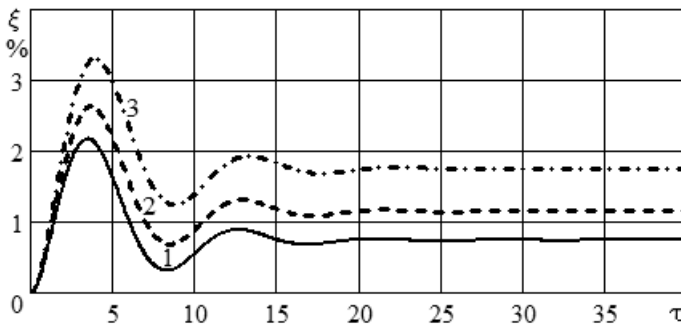


Рис. 3. Изменение относительного удлинения троса при увеличении  $K_g$   
 $\xi(\tau) = 100x(\tau) / (\ell_0 - \psi(\tau) + x(\tau))$

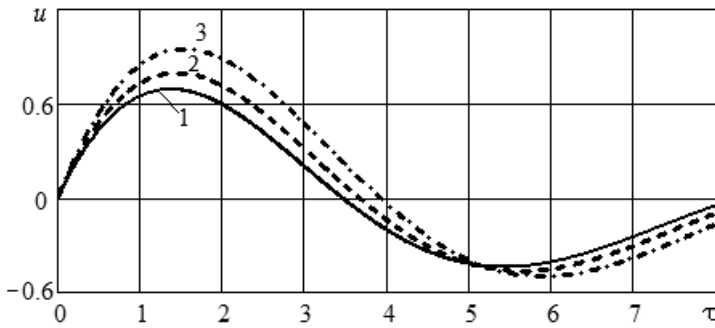


Рис. 4. Изменение безразмерной скорости удлинения троса в начальный период при увеличении  $K_g$

С увеличением веса груза снижается установившаяся скорость вращения барабана, время установления изменяется незначительно (рис. 5); изменяется частота колебаний троса относительно вертикали (рис. 6). Изменения угловых скоростей отклонений (рис. 7) соответствуют колебаниям математического маятника с переменной длиной нити [6]. В соответствии с физическим смыслом задачи чем больше величина  $K_g$ , тем меньше скорость подъема груза, а значит, и скорость уменьшения длины свободной части троса (рис. 8).

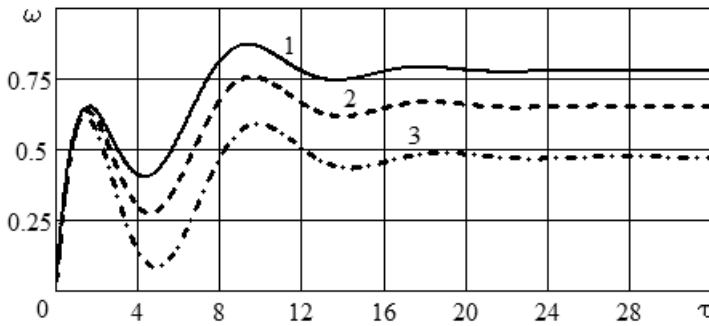


Рис. 5. Изменение безразмерной угловой скорости вращения барабана при увеличении  $K_g$

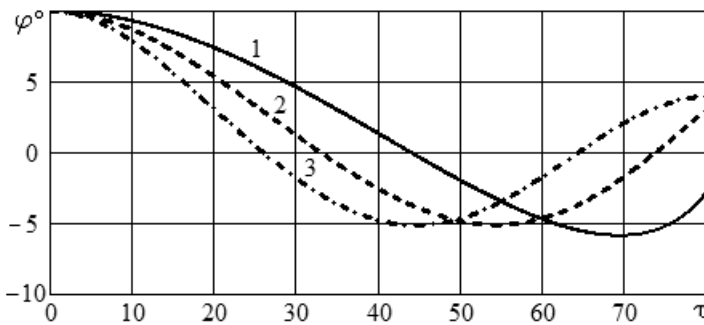


Рис. 6. Изменение угла отклонения троса от вертикали при увеличении  $K_g$

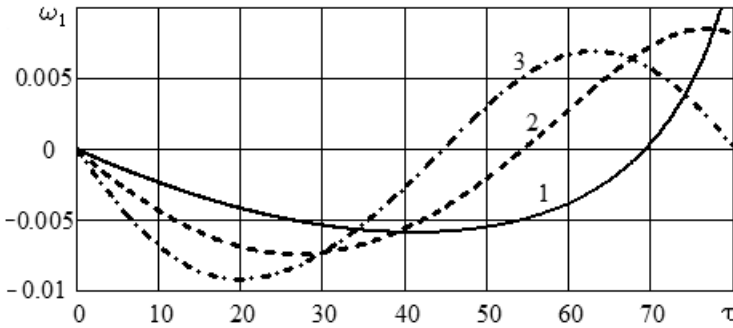


Рис. 7. Изменение безразмерной угловой скорости отклонения троса от вертикали при увеличении  $K_g$

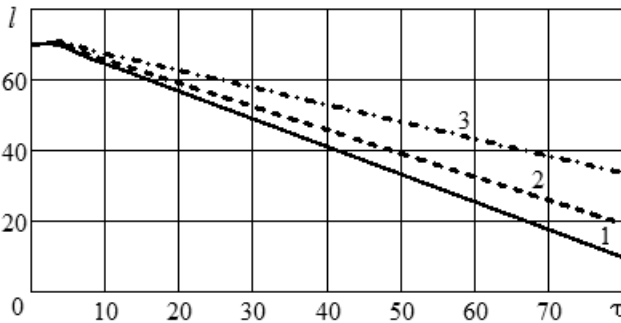


Рис. 8. Изменение безразмерной длины свободной части троса при увеличении  $K_g$

На рисунках 9–14 показано влияние критерия подобия  $K_m$ :

$$1 - K_m = 0,5; 2 - K_m = 1,5; 3 - K_m = 3,0,$$

что соответствует уменьшению осевого момента инерции барабана при прочих равных условиях. Величина  $K_m$  не влияет ни на установившуюся угловую скорость вращения барабана, ни на значение установившегося удлинения троса, но изменяет время переходного процесса (рис. 9–12). Однако влияет и на частоту и на размах отклонений троса от вертикали (рис. 13–14).

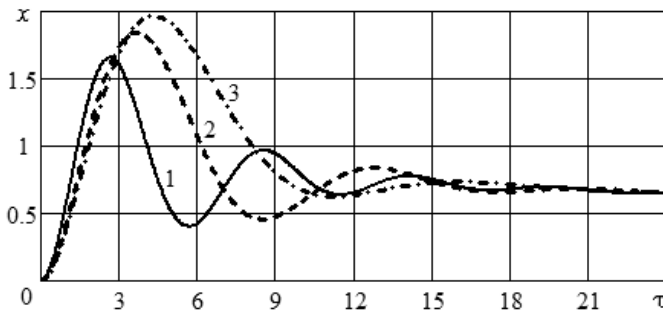


Рис. 9. Изменение абсолютного (безразмерного) удлинения троса при увеличении  $K_m$

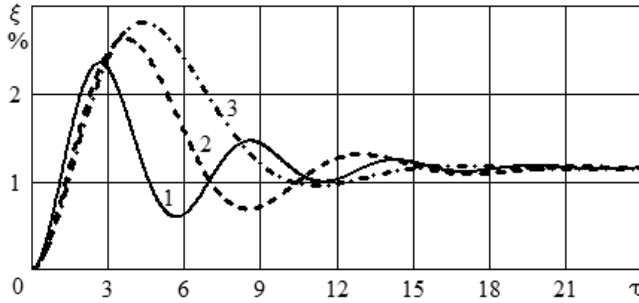


Рис. 10. Изменение относительного удлинения троса при увеличении  $K_m$

98

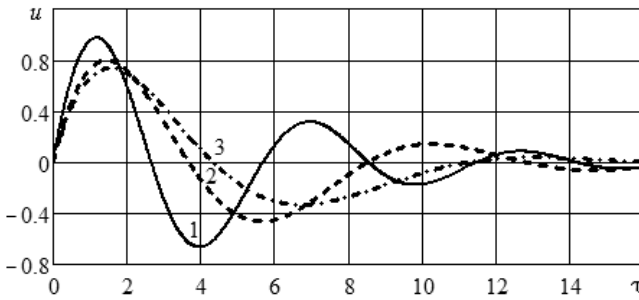


Рис. 11. Изменение безразмерной скорости удлинения троса при увеличении  $K_m$

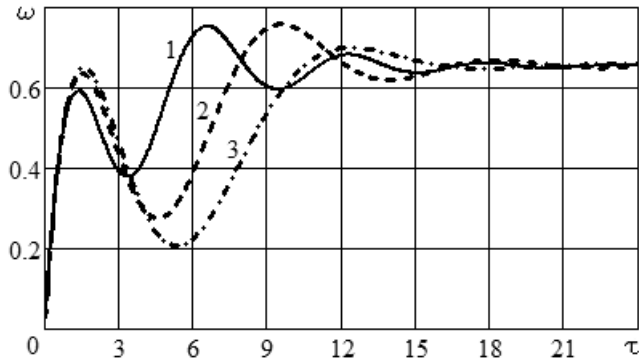


Рис. 12. Изменение безразмерной угловой скорости вращения барабана при увеличении  $K_m$

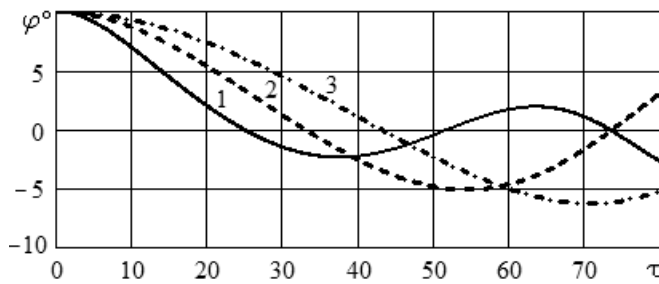


Рис. 13. Изменение угла отклонения троса от вертикали при увеличении  $K_m$



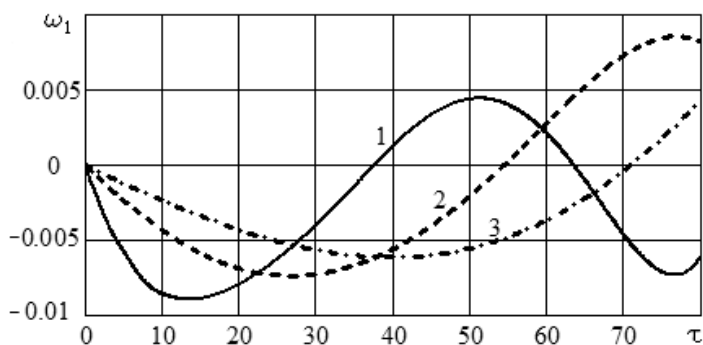


Рис. 14. Изменение безразмерной угловой скорости отклонения троса от вертикали при увеличении  $K_m$

Изменение значений критерия подобия  $\varphi_0$  и  $K_R$  в наибольшей степени влияет на отклонение троса от вертикали (рис. 15, 16). При этом увеличение начального угла приводит только к росту наибольших отклонений; увеличение аэродинамического сопротивления груза – к их уменьшению.

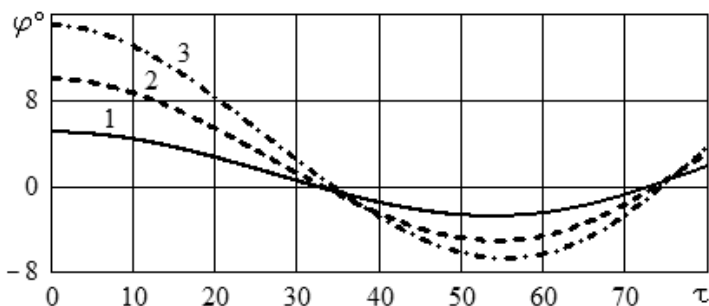


Рис. 15. Изменение угла отклонения троса от вертикали при увеличении  $\varphi_0$ :  
1 -  $\varphi_0 = 5^\circ$ ; 2 -  $\varphi_0 = 10^\circ$ ; 3 -  $\varphi_0 = 15^\circ$

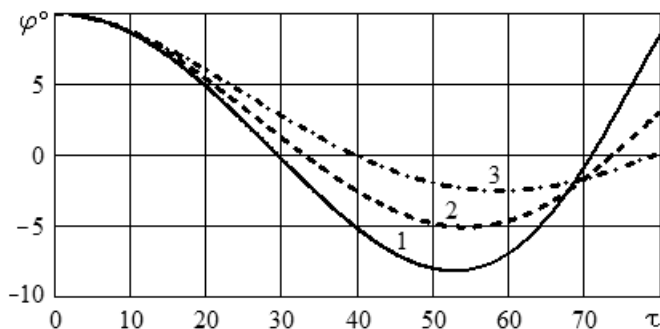


Рис. 16. Изменение угла отклонения троса от вертикали при увеличении  $K_R$ :  
1 -  $K_R = 0,06$ ; 2 -  $K_R = 0,1$ ; 3 -  $K_R = 0,16$



### Список литературы

1. Кулешова М. Ф., Щербак О. В., Розенфельд Н. В. и др. О влиянии радиуса блока на натяжение канатов в системе подвески груза // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. 2007. № 36. С. 102–104.
2. *Uzunov T.* Experimental determination of dynamic characteristics of electric wire rope hoist // *Acta Technica Corviniensis-Bulletin of Engineering*. 2010. Vol. 3. P. 113–116.
3. *Однокопылов И. Г., Гнеушев В. В., Филиппов А. С.* Исследование динамических нагрузок электропривода подъема каротажной лебедки // *Фундаментальные исследования*. 2015. № 2. С. 1392–1396.
4. *Debeleac C., Nastac S.* Computational dynamics of hoist and drag cables within simulation of dragline bucket behaviour // *Acta Electrotechnica*. 2016. Vol. 57, № 1–2. P. 132–135.
5. *Великанов Н. Л., Наумов В. А., Примак Л. В., Ахмедов И. М.* Динамика электрической подъемной лебедки // *Механизация строительства*. 2017. № 8. С. 41–45.
6. *Красильников П. С., Сторожкина Т. А.* Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2011. Вып. 46. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=26045> (дата обращения: 20.05.2017).

### Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

Исфендияр Махмуд оглы Ахмедов — асп., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: van-old@rambler.ru

### The authors

Prof. Nikolay Velikanov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov, Kaliningrad state technical university, Russia.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

Isfendiar Ahmedov, PhD student, Kaliningrad state technical university, Russia.

E-mail: van-old@rambler.ru