УДК 378.4

А. А. Зайцев, С. Н. Иванов, А. В. Юдина

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АНТИЦИКЛОНА С БАРЬЕРОМ

Рассмотрено взаимодействие двумерного антициклона с барьером. Получено и решено его уравнение движения. Установлено, что при приближении к краю барьера антициклон ускоряется, создавая интенсивное течение. Изучена картина линий тока.

The article considers the interaction of a two-dimensional anticyclone with a barrier and generates and solves its motion equation. The authors claim that an anticyclone accelerates at the approach of the edge of a barrier forming an intensive stream. The article also offers the streamline pattern analysis.

Ключевые слова: двумерный вихрь, антициклон, взаимодействие, траектория, скорость течения, линии тока.

Keywords: two-dimensional vortex, anticyclone, interaction, trajectory, flow velocity, streamline.

Введение

Вопрос о взаимодействии вихрей с морскими берегами представляет несомненный практический интерес, однако детально разработанная теория этого взаимодействия отсутствует. В классической монографии [1] имеется следующее замечание. Взаимодействие циклона с антициклоном, модули интенсивностей которых одинаковы (вихревой дублет), ведет к поступательному движению этой пары с постоянной скоростью, обратно пропорциональной расстоянию между вихрями. При этом средняя линия между ними оказывается линией тока. Поскольку береговая линия всегда является линией тока, то отсюда можно сделать такой вывод. Течение, создаваемое одиночным вихрем вблизи берега, отражается от береговой линии. Отраженное течение можно рассматривать как течение, создаваемое мнимым вихрем противоположной интенсивности, который расположен в симметричной точке. Вихрь попадает в отраженное течение и начинает двигаться параллельно берегу с постоянной скоростью, обратно пропорциональной расстоянию до берега. Для берегов, имеющих сложную конфигурацию, задачи взаимодействия решить значительно трудней. В этой статье мы решаем ее для случая взаимодействия двумерного антициклона с барьером.

Постановка задачи. Уравнения движения

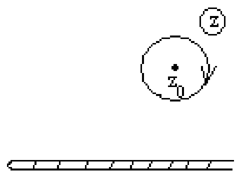

Рис. 1. Антициклон вблизи барьера

Здесь рассматривается двумерная задача. Используются комплексные переменные: z и z_0 обозначают соответственно комплексные координаты точки наблюдения и антициклона (случай циклона интереса не представляет, поскольку он уходит от кромки барьера), интенсивность которого равна $-k$, $k>0$. Допустим, что барьером служит луч $0 \le \mathrm{Re} z < \infty$, $\mathrm{Im} z = 0$ (рис. 1), а для начальной координаты антициклона выполнено условие $\mathrm{Im} z_0 > 0$. Требуется найти уравнение движения вихря и определить его траекторию.

Поле скоростей течения, создаваемого вихрем, определяется с помощью конформного отображения $\zeta = \sqrt{z}$ на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\zeta > 0$ и имеет вид [2; 3]

$$V = \frac{k}{4\pi i}\left(\frac{1}{\bar{z} - \sqrt{\overline{z_0 z}}} - \frac{1}{\bar{z} + \sqrt{z_0 \bar{z}}}\right). \tag{1}$$

Вычитая собственное течение вихря, получаем поле скоростей того течения, которое воздействует на вихрь:

$$V_r = -\frac{k}{4\pi i}\left(\frac{1}{\bar{z} + \overline{\sqrt{z_0 z}}} + \frac{1}{\bar{z} - \overline{\sqrt{z_0}\sqrt{z}}}\right). \tag{2}$$

Скорость вихря $\dot{z}_0$ должна совпадать со скоростью V_r в точке $z=z_0$. Переходя в формуле (2) к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\dot{z}_0 = -\frac{k}{4\pi i}\left(\frac{1}{\overline{2z_0}} + \frac{1}{z_0 - |z_0|}\right). \tag{3}$$

Получено уравнение движения антициклона.

Траектория антициклона

Уравнение траектории антициклона получается интегрированием уравнения (3). С этой целью полагаем $z_0 = r\exp(i\varphi)$ и делаем подстановку в уравнение (3). После отделения действительной и мнимой частей получаем

$$\dot{r} = -\frac{k}{4\pi r}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{k}{4\pi r^2}. \tag{4}$$

Система (4) имеет первый интеграл

$$r\sin\frac{\varphi}{2} = d, \tag{5}$$

который и будет уравнением траектории. Из соотношения (5) следует, что траектория вихря симметрична относительно оси абсцисс.

С помощью равенства (5) несложно найти зависимость r от t. Действительно, с учетом (5) первое уравнение системы (4) принимает вид

$$\dot{r} = \frac{k\sqrt{r^2 - d^2}}{8\pi dr}\,\mathrm{sgn}t. \qquad (6)$$

Его интегрирование дает нужную зависимость $r=\sqrt{k^2t^2+64\pi^2d^4}\,/8\pi d$ (мы считаем, что вихрь находился в окрестности выступа в момент t=0). Она показывает, что с ростом t от $-\infty$ до 0 расстояние до выступа убывает и в момент пересечения оси абсцисс достигает минимального значения d. Можно показать, что в том случае, когда вихрь находится вдали от выступа, расстояние до барьера равно $2d$.

Формулы (4) и (6) позволяют найти зависимость модуля скорости вихря от расстояния; она следующая: $|V|=k\sqrt{r^2+3d^4}\,/8\pi dr$. Это равенство показывает, что вдали от кромки барьера скорость вихря минимальная и равна $|V|_{\min}=k/8\pi d$, а вблизи максимальная и равна $|V|_{\max}=2|V|_{\min}=k/4\pi d$.

Поле течений и линии тока

Выражение для скорости течения, создаваемого движущимся вихрем, можно получить, если использовать формулу (1), равенство $z_0=r\exp(i\varphi)$ и зависимость r и φ от t, в том числе зависимость (6). Наибольший интерес представляет оценка модуля скорости течения вблизи кромки барьера. Полагая в формуле (1) $R=|z|<<r$, получаем $|V|=k\sin(\varphi/2)/2\pi\sqrt{rR}$, то есть модуль скорости течения растет обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до кромки барьера. Это означает, что вблизи барьера скорость течения очень велика.

Представляет интерес картина линий тока. Ограничимся случаем, когда вихрь проходит в окрестности края барьера. Используя формулу (1), получаем следующее выражение для функции тока:

$$\psi = \frac{k}{2\pi}\ln\left|\frac{\sqrt{z}-i\sqrt{d}}{\sqrt{z}+i\sqrt{d}}\right|.$$

Вдоль линий тока эта величина является константой; следовательно, аргумент логарифма также будет константой. Переходя к полярной системе координат, получаем уравнение линий тока в виде

$$\frac{r-2\sqrt{dr}\sin(\varphi/2)+d}{r+2\sqrt{dr}\sin(\varphi/2)+d}=a,\ 0<a<1.$$

Анализ этого уравнения показывает: 1) через каждую точку водного пространства проходит единственная линия тока, 2) все линии тока являются гладкими замкнутыми линиями, симметричными относительно оси абсцисс, 3) для каждого значения угла φ_0 в промежутке $0<\varphi_0<\pi$ линия тока касается границ сектора $\varphi_0\le\varphi\le2\pi-\varphi_0$ в двух симметричных точках; в случае $\varphi_0\ge2\pi/3$ и только в этом случае линия тока будет выпуклым овалом.

Заключение

В работе установлено, что взаимодействие вихря с барьером приводит к его движению, которое ускоряется по мере приближения к краю барьера. Расстояние до барьера сокращается. При этом возникает интенсивное течение, модуль скорости которого обратно пропорционален корню квадратному из расстояния до края барьера, что может привести к неблагоприятным последствиям, хорошо известным на практике. Изучена картина линий тока.

Для решения поставленной задачи использованы методы теории функций комплексной переменной и теории динамических систем. Их сочетание должно позволить получить решение более сложных задач о взаимодействии вихрей.

Список литературы

1. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М., 1964.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексной переменной. М., 1973.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., 1973.

Об авторах

А. А. Зайцев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., РГУ им. И. Канта.

С. Н. Иванов — канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. морской метеорологии АО ИОРАН.

А. В. Юдина — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Zaytsev — Dr., IKSUR.

S. Ivanov — Dr., Oceanology Institute of the Russian Academy of Sciences.

A. Yudina — student, IKSUR.