объекта проективной связности $\Gamma=\{\Gamma^{\bar\alpha}_{\bar\beta \varkappa}\}$ осуществляем по формулам

$$\begin{cases} \Gamma^{\alpha}_{0\varkappa}=\nu^{\alpha}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}, & \Gamma^{0}_{0\varkappa}=\Psi^{0}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}-L^{0}_{i}\delta^{i}_{\varkappa}-L^{0}_{p}\delta^{p}_{\varkappa}, \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\varkappa}=\nu^{\alpha}_{n}H^{n}_{\beta\varkappa}, & \Gamma^{0}_{\alpha\varkappa}=\Psi^{0}_{n}H^{n}_{\alpha\varkappa}-L^{0}_{i}H^{i}_{\alpha\varkappa}-L^{0}_{p}N^{p}_{\alpha\varkappa}. \end{cases} \tag{2.I9}$$

Тогда слоевые формы (2.I5) в силу (2.I9) примут окончательно следующий вид:

$$\begin{cases} \vartheta^{0}_{0}=\omega^{0}_{0}-(\Psi^{0}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}-L^{0}_{i}\delta^{i}_{\varkappa}-L^{0}_{p}\delta^{p}_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_{0}, \\ \vartheta^{\alpha}_{0}=\omega^{\alpha}_{0}-\nu^{\alpha}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \quad \vartheta^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}-\nu^{\alpha}_{n}H^{n}_{\beta\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \\ \vartheta^{0}_{\alpha}=\omega^{0}_{\alpha}-(\Psi^{0}_{n}H^{n}_{\alpha\varkappa}-L^{0}_{i}N^{i}_{\alpha\varkappa}-L^{0}_{p}N^{p}_{\alpha\varkappa})\omega^{\varkappa}_{0}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Доказано, что проективная связность Γ определена путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей по Э.Картану плоскости $\mathcal{L}_m(A_0)$ [2, (2.9), (2.II)].

Системы форм $\{\bar\omega^{\bar p}_{\bar q}\}, \{\bar\vartheta^{\bar i}_{\bar j}\}, \{\bar\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\}$, построенные по законам соответственно вида (2.7), (2.I3), (2.20) (в этом случае, входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху), удовлетворяют (каждая) структурным уравнениям Картана-Лаптева и определяют соответственно пространства $\bar P_{n,r}$; $\bar P_{n,e}$; $\bar P_{n,n-m-1}$ с линейной связностью проективного типа, двойственные соответственно пространствам $P_{n,r}$; $P_{n,e}$; $P_{n,n-m-1}$. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 2. С регулярным $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределением проективного пространства P_n в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ его образующего элемента ассоциируются пространства проективной связности $\bar P_{n,r}$; $\bar P_{n,e}$; $\bar P_{n,n-m-1}$, двойственные в смысле А.В.Столярова соответственно пространствам проективной связности $P_{n,r}$; $P_{n,e}$; $P_{n,n-m-1}$ относительно инволютивного преобразования $\mathcal{I}$ (I.I). Порядок t дифференциальной окрестности определяется порядком охвата квазитензоров $\{\nu^{p}_{n}\}, \{\nu^{i}_{n}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}$, участвующих в охватах.

Библиографический список

I. В о л к о в а С.Ю. $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I99I. Вып.22. С.23-25.

2. В о л к о в а С.Ю. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\hat{\mathcal{H}}(\Lambda,L)$-распределением // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I992. Вып.23.С.I5-23.

3. С т о л я р о в В.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. I; П // Известия вузов. Математика. I980. №I. С.79-82; I980. № 2. С.84-87.

4. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория гиперплоскостного распределения и ее приложения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I982. Вып.I3. С.95-I02.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IУ Всесоз. матем. съезда, I96I. Л.: Нака, I964. Т.2. С.225-233.

6. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., I97I. Т.3. С.49-94.

УДК 5I4.763

О ГРУППЕ ТОЧЕЧНЫХ СИММЕТРИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

В.И.Г л и з б у р г

(Московский государственный педагогический университет)

Предметом исследования настоящей статьи является обыкновенная дифференциальная система произвольного порядка $p>2$

$$\frac{d^p x^a}{(dx^1)^p}=S^a_{(p)}\left(x^1, x^b, \frac{dx^b}{dx^1}, \dots, \frac{d^{p-1}x^b}{(dx^1)^{p-1}}\right), \quad a,b=\overline{2,n}, \tag{I}$$

определенная на дифференцируемом многообразии V_n, и некоторые вопросы, связанные с ее группой точечных симметрий.

В работах [I], [2], [3] на основе поэтапного многоступенчатого процесса редукции расслоения p-реперов предложены конструкции связностей картановского типа как редуктивной [3], так и не являющейся таковой [I] - [3], ассоциированных с исходной системой дифференциальных уравнений (I). Другими словами, построена замкнутая инвариантная дифференциально-геометрическая структура, трактуемая как связность Картана в некотором главном расслоении, полностью определяющая геометрию обыкновенной дифференциальной системы произвольного порядка.

Т е о р е м а I. Система обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка (I) индуцирует в некотором главном расслоении с приклеенной секущей связность картановского типа со структурными уравнениями:

$$
\begin{cases}
d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^1_1 + \Omega^1, \; d\omega^1_1 = \omega^1 \wedge \omega^1_{11} + \Omega^1_1, \; d\omega^1_{11} = \omega^1_1 \wedge \omega^1_{11} + \Omega^1_{11}, \\
d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \omega^1 \wedge \omega^a_1, \; d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \frac{p-1}{2}\delta^a_b \omega^1 \wedge \omega^1_{11} + \Omega^a_b, \\
d\omega^a_1 = \omega^b_1 \wedge (\omega^a_b - \delta^a_b \omega^1_1) + \frac{p-1}{2}\omega^a \wedge \omega^1_{11} + \omega^1 \wedge \omega^a_{11} + \Omega^a_1, \\
d\omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{s}} = \omega^b_{\underbrace{1\ldots1}_{s}} \wedge (\omega^a_b - s\delta^a_b \omega^1_1) + \frac{s(p-1)}{2}\omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{s-1}} \wedge \omega^1_{11} + \omega^1 \wedge \omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{s+1}} + \Omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{s}}, \\
d\omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}} = \omega^b_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}} \wedge (\omega^a_b - (p-1)\delta^a_b \omega^1_1) + \frac{p-1}{2}\omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{p-2}} \wedge \omega^1_{11} + \Omega^a_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}} \qquad (s = \overline{2, p-2})
\end{cases}
\tag{2}
$$

и фундаментальной группой G^{p-1}_n размерности

$$n + (p-1)(n-1) + (n-1)^2 + 2,$$

уравнения Маурера-Картана которой совпадают с уравнениями (2) при $\Omega \equiv 0$. Формы $\{\Omega\}$ определяют кривизну-кручение связности.

Более подробно свойства рассматриваемой связности, ее фундаментальной группы и объекта кривизны-кручения, а также и связь с некоторыми классами дифференциальных систем изучены в работах [3] – [8]. Приведем некоторые из них, необходимые для дальнейшего изложения материала данной статьи, в которой в основном будут освещены вопросы, представляющие некоторый интерес с точки зрения группового анализа дифференциальных уравнений. Так, напрмер, в работе [6] доказаны

Т е о р е м а 2. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (I) инвариантна относительно действия группы G^{p-1}_n тогда и только тогда, когда она в некоторой локальной системе координат приводима к простейшему виду:

$$\frac{d^p x^a}{(dx^1)^p} = 0 . \tag{3}$$

Т е о р е м а 3. Объект кривизны-кручения ассоциированной с системой (I) редуктивной связности Картана обращается в нуль тогда и только тогда, когда система (I) в некоторой локальной системе координат приводима к виду (3).

Как видно из теоремы I, существование конструкции главного расслоенного пространства со связностью Картана, ассоциированной с исходной дифференциальной системой (I) и описываемой структурными уравнениями (2), позволяет дать оценку размерности группы точечных симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Справедлива

Т е о р е м а 4. Размерность группы точечных симметрий обыкновенной дифференциальной системы (I) не превосходит

$$n + (p-1)(n-1) + (n-1)^2 + 2 ,$$

где p – порядок системы, n-размерность дифференцируемого многообразия V_n, на котором определена рассматриваемая система, а $(n-1)$ – число уравнений, входящих в состав системы.

Естественно возникает вопрос о возможности достижения приведенной в теореме 4 оценки. Ответ положителен и содержится в следующих утверждениях, непосредственно вытекающих из результатов, опубликованных в работах [4], [6], [8], а также из теорем 2, 3.

Т е о р е м а 5. Фундаментальная группа G^{p-1}_n связности Картана, ассоциированной с фундаментальной системой (I), является группой точечных симметрий простейшей дифференциальной системы (3).

С л е д с т в и е I. Приведенная в теореме 4 оценка достигается на системе (3).

С л е д с т в и е 2. Приведенная в теореме 4 оценка достигается на дифференциальной системе, индуцирующей плоскую редуктивную связность Картана.

Явно посчитана группа точечных симметрий вышеуказанной системы (3) [3, с.86]. Найдено представление фундаментальной группы G^{p-1}_n связности, а значит, в силу теоремы 5, и группы точечных симметрий системы (3) в R^n [3], [8].

Т е о р е м а 6. Группа точечных симметрий дифференциальной системы (3) представлена в R^n преобразованиями следующего вида:

$$\tilde{x}^1 = \frac{y^1_1 x^1 + y^1}{y^1_{11} x^1 + y}, \qquad \tilde{x}^a = \frac{y^a_b x^b + \sum\limits_{g=0}^{p-1} \frac{1}{g!} y^a_{\underbrace{1\ldots1}_{g}} (x^1)^g}{(y^1_{11} x^1 + y)^{p-1}} .$$

В заключение отметим, что изложенные в данной статье факты представляют собой в некотором роде обобщение классических результатов С.Ли [12] – [14] по групповому анализу обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на случай системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка $p>2$.

Автор благодарен Е.В.Ферапонтову за совет использовать полученные в работах [1] – [8] результаты применительно к групповому анализу дифференциальных уравнений.

Библиографический список

I. Г л и з б у р г В.И. Инвариантное описание обыкновенной дифференциальной системы высшего порядка // Изв. вузов. Математика. I992. № I. С.5I-58.

2. Г л и з б у р г В.И. Редукция расслоения p -реперов, инвариантно определяемая обыкновенной дифференциальной системой порядка $p>2$ / Моск. пед. гос. ун-т. М., I99I. I6 с. Деп. в ВИНИТИ I4.II.9I. № 429I-В9I.

3. Г л и з б у р г В.И. Геометрия системы уравнений
$$\frac{d^p x^a}{(dx^1)^p} = S^a_{(p)}\left(x^1, x^b, \frac{dx^b}{dx^1}, \ldots, \frac{d^{p-1}x^b}{(dx^1)^{p-1}}\right);$$
Дис. канд. физ.-мат. наук. М., I992.

4. Г л и з б у р г В.И. Фундаментальная группа и объект кривизны-кручения связности Картана, инвариантно определяемой обыкновенной дифференциальной системой порядка $p>2$ / Моск. пед. гос. ун-т. М., I99I. 32 с. Деп. в ВИНИТИ I4.II.9I, № 4290-В9I.

5. Г л и з б у р г В.И. Об объекте кривизны-кручения связности Картана, ассоциированной с обыкновенной дифференциальной системой высшего порядка // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград. I992. Вып.23. С.23-29.

6. Г л и з б у р г В.И. О группе инвариантности обыкновенной дифференциальной системы $\frac{d^p(x^a)}{(dx^1)^p}=0$ // Матер. науч. сессии по итогам науч.-исслед. работы за I99I г. Сер. естеств. науки / МПГУ им. В.И.Ленина. М.: Прометей, I992. С.I3-I5.

7. Г л и з б у р г В.И. Интегральные кривые как геодезические ассоциированной связности // Междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия". Казань, I992. С.24-25. Тез. докл. Ч.I.

8. Glizburg V. About the fundamental group G_n^{p-1} of connection generated by the differential system of higher order // Acta et commentationes universitatis Tartuensis: Application of topology in algebra and differential geometry. Tartu, 1992. V. 940. p. 41-46.

9. И б р а г и м о в Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, I983.

I0. О в с я н н и к о в Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, I978.

II. О л в е р П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, I989.

I2. Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. 1888. V. 32. p. 213-281; also Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1924. V. 5. p. 240-310.

13. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. Leipzig, 1891.

14. Lie S. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleihungen beliebeger Ordnung // Leipz. Berich. 1895. V. 1. p. 53-128; also Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1929. V. 4. p. 320-384.

УДК 5I4.75

ПРОЕКТИВНЫЕ НОРМАЛИ $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_{n+1}

М.Ф.Г р е б е н ю к

(Киевское ВВАТУ)

Рассматриваются трехсоставные распределения ($\mathcal{H}$-распределения) аффинного пространства A_{n+1} [I]. В окрестности второго порядка вводятся функции $\{\mathfrak{M}^\sigma\}$, определяющие в каждом центре $\mathcal{H}$-распределения нормаль I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Нормаль $\{\mathfrak{M}^\sigma\}$ является обобщением нормали Михэйлеску I-го рода для гиперплоскостного распределения аффинного пространства [2], [3] Построено поле нормалей $\{\mathcal{J}^p\}$, внутренним инвариантным образом присоединенных в третьей дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения. Объект $\{\mathcal{J}^p\}$ определяет в каждом центре А образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения проективную нормаль - аналог нормали Фубини для $\mathcal{H}$-распределения. Показано, что квазитензор второго порядка $\{S^\sigma\}$ задает проективную нормаль I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Проективные нормали I-го рода $\{\mathfrak{M}^\sigma\}, \{\mathcal{J}^p\}, \{S^\sigma\}$ позволяют получить пучки проективных нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения в дифференциальных окрестностях второго и третьего порядков. Отмечено, что аналогично в дифференциальных окрестностях второго и третьего порядков находятся пучки проективных нормалей I-го рода Λ-распределения

6 Зак. 2036