УДК 514.76

***А. Я. Султанов*[1]*, М. В. Глебова*[2]*, Г. А. Султанова*[3]**

[1, 2] Пензенский государственный университет, Россия
[3] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. А. В. Хрулева (Пенза), Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] mvmorgun@mail.ru, [3] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-5

Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем

Линейные алгебры над заданным полем возникают при изучении различных задач алгебры, анализа и геометрии. Операция дифференцирования, возникшая в математическом анализе, была перенесена в теорию линейных алгебр над полем, а также в теорию колец.

Множество всех дифференцирований линейной алгебры сами образуют линейную алгебру. Эта алгебра называется алгеброй дифференцирований. При этом она допускает структуру алгебры Ли. Если алгебра, дифференцирования которой рассмотрены, является конечномерной, то ее алгебра Ли дифференцирований будет также конечномерной. Поэтому возникает естественная задача определения размерности алгебр Ли дифференцирований рассматриваемой линейной алгебры или оценки сверху размерности алгебры дифференцирований.

Для решения этих задач в работе получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования. Оценка ранга этой системы позволяет получить оценку снизу ранга матрицы рассматриваемой системы. Получена оценка размерности сверху алгебр Ли дифферен-

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.

цирований произвольной конечномерной линейной алгебры, обладающей главной единицей над произвольным полем, характеристика которого отлична от двух. Доказана точность полученной оценки путем построения линейной алгебры, алгебра Ли дифференцирований которой реализует максимальную размерность алгебры дифференцирований данной алгебры.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференцирование линейной алгебры, размерность алгебры Ли, линейная алгебра

1. Необходимые понятия и сведения из теории линейных алгебр и их дифференцирований

Линейной алгеброй над полем P называется векторное пространство над этим полем, на котором задана билинейная операция, называемая операцией умножения. Будем считать, что рассмотренная алгебра A является конечномерной, а произведение любых двух элементов x и y обозначим через xy.

Дифференцированием линейной алгебры А называется всякий линейный оператор $D: A \to A$, удовлетворяющий условию

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

для любых элементов x и y из A.

Множество всевозможных дифференцирований алгебры A обозначается символом $DerA$. Это множество допускает естественную структуру алгебры Ли над полем P относительно операции коммутирования, определенной по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1{\circ}\, D_2 - D_2{\circ} D_1,$$

где $\circ$ является композицией отображений D_1 и D_2.

Алгебра Ли $DerA$ имеет размерность, не превращающую n^2, где n — размерность алгебры A [2]. Для доказательства этого утверждения возьмем полную линейную алгебру Ли *gl*(*n,P*) квадратных матриц порядка *n* над полем *P*. Операция коммутирования в этой алгебре задана по правилу

$$[B,C] = BC - CB,$$

где *BC* и *CB* — произведения матриц *B* и *C* из *gl*(*n,P*). Размерность этой алгебры Ли над полем *P* равна n^2.

Далее в алгебре *A* выберем некоторый базис $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Для произвольного дифференцирования *D* алгебры *A* положим

$$D(e_i) = x_i^k e_k, x_i^k \in P$$

и составим матрицу $M(D) = ||x_i^k||$, для элементов x_i^k будем считать, что верхний индекс указывает номер строки, а нижний — номер столбца.

Ясно, что $M(D)$ является элементом множества *gl*(*n,P*). Так как для дифференцирования *D* относительно выбранного базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ матрица $M(D)$ определена единственным образом, то можно определить отображение

$$f: Der\ A \to gl(n,P)$$

условием $f(D) = M(D)$.

Можно доказать, что отображение *f* является гомоморфизмом, причем инъективным, то есть $Ker\ f = \{0\}$. В силу этого заключаем, что $dim(Der\ A) \leq n^2$.

Пусть $D(e_i) = x_i^k e_k$ и $e_i e_j = C_{ij}^k e_k$, где C_{ij}^k — структурные постоянные алгебры относительно базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Оператор *D* будет дифференцированием тогда и только тогда, когда

$$D(e_i e_j) = D(e_i)e_j + e_i D(e_j).$$

Эти соотношения равносильны следующей системе линейных однородных уравнений относительно переменных x_i^k:

$$C_{mj}^h x_i^m + C_{im}^h x_j^m - C_{ij}^m x_m^h = 0. \qquad (1.1)$$

Эту систему представим следующим образом:

$$C\left(\begin{smallmatrix}h\\ij\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\\m\end{smallmatrix}\right)x_k^m = 0, \tag{1.2}$$

где

$$C\left(\begin{smallmatrix}h\\ij\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\\m\end{smallmatrix}\right) = \delta_i^k\, C_{mj}^h + \delta_j^k C_{im}^h - \delta_m^h C_{ij}^k. \tag{1.3}$$

Здесь $\delta_i^k = \begin{cases} 1 \text{ при } k = i \\ 0 \text{ при } k \neq i \end{cases}$ — символ Кронекера, 1 — единичный элемент поля P, 0 — нейтральный (нулевой) элемент поля P.

Из скаляров $C\left(\begin{smallmatrix}h\\ij\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\\m\end{smallmatrix}\right)$ составим прямоугольную матрицу

$$C = C\left(\begin{smallmatrix}h\\ij\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\\m\end{smallmatrix}\right),$$

где тройка индексов $\binom{h}{ij}$ фиксирует строку, а пара индексов $\binom{k}{m}$ — столбец этой матрицы. Так, например, скаляр $C\left(\begin{smallmatrix}h\\ij\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\\m\end{smallmatrix}\right)$ является коэффициентом при переменном x_m^k в уравнении $\binom{h}{ij}$ (при фиксированных индексах h, i, j, k, m).

Поскольку система (1.2) линейная и однородная, то имеет место

Теорема 1.

(1) $dim(Der\ A) \leq n^2 - \rho$, *где* ρ *— ранг матрицы C;*

(2) *если* $rang\ C \geq r$, *то* $dim(Der\ A) \leq n^2 - r$.

Отметим, что ранг матрицы *C* не зависит от выбора базиса. Поэтому $dim(Der\ A)$ не зависит от выбора базиса.

2. Оценка сверху размерности алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры A, обладающей единицей

Предположим, что линейная алгебра *A* обладает единицей, то есть в ней имеется элемент δ такой, что $\delta x = x\delta = x$. Элемент δ обычно называется главной единицей алгебры [1]. Очевидно, что алгебра *A* имеет лишь только одну главную единицу. Для исследования алгебры дифференцирований алгебры A выберем специальным образом базис в ней. Включим главную единицу в базис и обозначим $\delta = e_0$. Остальные элементы базиса могут быть выбраны произвольно. Тогда получим следующий набор базисных элементов: $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$. Так как $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, то структурные постоянные алгебры A будут удовлетворять условиям

$$C_{0i}^k = \delta_i^k\,, C_{i0}^k = \delta_i^k.$$

Эти соотношения являются необходимым и достаточным условием того, что элемент является главной единицей алгебры A. Считая, что $e_0 = \delta$, перейдем к исследованию матрицы C.

Теорема 2. *Размерность алгебры $DerA$ алгебры A с единицей не больше, чем $(n-1)^2$, где $n = dim_P A$ при условии, что характеристика поля P не равна 2.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу T, составленную из коэффициентов при переменных

$$x_1^0, x_i^0 \ (i > 1), \qquad x_0^k \ (k > 0)$$

в уравнениях

$$\binom{1}{11}, \binom{1}{m1}\ (m > 1), \qquad \binom{h}{00}\ (h = 0,1, \dots, n-1).$$

Вычислим эти коэффициенты по формулам (1.3), получим

$$C\left(\begin{smallmatrix}1\\11\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = C_{01}^1 + C_{10}^1 = 2, \qquad C\left(\begin{smallmatrix}1\\m1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

$$C\left(\begin{smallmatrix}1\\m1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}h\\0\end{smallmatrix}\right) = \delta_m^h C_{01}^1 = \delta_m^h, C\left(\begin{smallmatrix}h\\00\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = -\delta_0^h C_{00}^1 = 0,$$

$$C\left(\begin{smallmatrix}h\\00\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\k\end{smallmatrix}\right) = \delta_k^h + \delta_k^h - \delta_k^h C_{00}^0 = \delta_k^h.$$

На основании полученных соотношений можно сделать вывод о том, что матрица T имеет следующее строение:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & E_{n-2} & * \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix},$$

где E_s — единичная матрица порядка s. Ранг этой матрицы равен $2n-1$. Следовательно, ранг матрицы C не меньше, чем $2n-1$. Отсюда заключаем, что

$$dim(Der\ A) \leq n^2 - (2n-1) = (n-1)^2.$$

Для доказательства точности оценки рассмотрим алгебру $(n-1)$-дуальных чисел $R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \{a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1}\varepsilon_{n-1} | \, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in P, \ \varepsilon_i\varepsilon_j = 0\}$, ε_0 — единица алгебры. Поэтому $D(\varepsilon_0) = D(\varepsilon_0\varepsilon_0)$. Отсюда

$$D(\varepsilon_0) = D(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 D(\varepsilon_0).$$

Значит, $D(\varepsilon_0) = 0$. Следовательно, $x_0^i = 0$ $(i = 0,1, \dots, n-1)$. Поскольку $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, то $D(\varepsilon_i)\varepsilon_j + \varepsilon_i D(\varepsilon_j) = 0$. Отсюда, положив $D(\varepsilon_i) = x_i^k \varepsilon_k$ $(k = 0,1, \dots, n-1)$, получим

$$x_i^0 \varepsilon_j + x_j^0 \varepsilon_i = 0.$$

Если $i = 1, \ j \neq 1$, то $x_1^0 = 0, \ x_j^0 = 0$ в силу линейной независимости $\varepsilon_1, \varepsilon_j$ $(j \neq 1)$. Значит, $x_1^0 = 0$ и $x_j^0 = 0$. То есть $x_k^0 = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Если же $dimA = 2$, то $2x_1^0\varepsilon_1 = 0$. Так как характеристика поля $P \neq 2$, то $x_1^0 = 0$ $(i \neq 0)$.

Таким образом, имеем $x_0^i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

Следовательно, каждое дифференцирование задается равенством $D(\varepsilon_i) = x_i^k \varepsilon_k$ $(i, k = 0, 1, \dots, n-1)$.

Следовательно, $dim\, R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) = (n-1)^2$. Это доказывает точность оценки в теореме 2.

Заметим, что аналогичные задачи авторами были рассмотрены для йордановых алгебр [8], а также для некоторых других алгебр специального вида [5—7].

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

2. *Винберг Э.* Б. Курс алгебры. М., 2021.

3. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. СПб., 2005.

4. *Мальцев А. И.* Линейная алгебра. М., 2010.
5. *Моргун М. В.* О размерностях алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения пространств аффинной связности // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 117—123.
6. *Моргун М. В.* Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности специального вида // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского. 2009. Вып. 17. С. 18—23.
7. *Султанов А. Я., Глебова М. В., Болотникова О. В.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.
8. *Султанов А. Я., Глебова М. В.* Об алгебре Ли дифференцирований йордановой алгебры билинейной симметрической формы // Итоги науки и техн. Соврем. математика и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 222. С. 94—99.
9. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, №2 (290). С. 75—106.
10. *Yano K.* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.

Для цитирования: *Султанов А. Я., Глебова М. В., Султанова Г. А.* Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 54—62. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-5.

MSC 2010: 16P10

A. Ya. Sultanov[1], *M. V. Glebova*[2], *G. A. Sultanova*[3]
[1, 2] *Penza State University*
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[3] *Branch of the Military Academy of Logistics named after A. V. Khrulev*
Penza-5, Penza region, 440005, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] mvmorgun@mail.ru, [3] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

Differentiation of linear algebras with a unit over a field

Submitted on April 29, 2023

Linear algebras over a given field arise when studying various problems of algebra, analysis and geometry. The operation of differentiation, which originated in mathematical analysis, was transferred to the theory of linear algebras over a field, as well as to the theory of rings.

The set of all differentiations of a linear algebra themselves form a linear algebra. This algebra is called the algebra of differentiations. At the same time, this algebra admits the structure of a Lie algebra. If the algebra whose differentiations are considered is finite-dimensional, then its Lie algebra of differentiations will also be finite-dimensional. Therefore, there is a natural problem of determining the dimension of the Lie algebras of the differentiations of the linear algebra under consideration or to obtain an estimate from above of the dimension of the algebra of differentiations.

To solve these problems, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of arbitrary differentiation. Evaluation of the rank of this system allows us to obtain an estimate from below of the rank of the matrix under consideration.

Keywords: Lie algebra, differentiation of linear algebra, dimension of Lie algebra, linear algebra

References

1. *Vishnevskij, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. (1985).

2. *Vinberg, E. B.:* Algebra Course. Moscow (2021).

3. *Kurosh, A. G.:* Lectures on general algebra. Saint Petersburg (2005).

4. *Maltsev, A. I.:* Linear Algebra. Moscow (2010).

5. *Morgun, M. V.:* On the dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of the direct product of spaces of affine connectivity. DGMF, 37, 117—123 (2006).

6. *Morgun, M. V.:* On Lie algebras of infinitesimal affine transformations of spaces of affine connectivity of a special kind. Izvestia Penza State Ped. Univ. 17, 18—23 (2009).

7. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M. V., Bolotnikova, O. V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF, 52, 123—136 (2021).

8. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M. V.:* On the Lie algebra of differentiations of a Jordan algebra of bilinear symmetric form. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 222, 94—99 (2023).

9. *Shurygin, V. V.:* Manifolds over algebras and their application in the geometry of jet bundles. Success of Math. Sci. **48**:2 (290), 75—106 (1993).

10. *Yano, K.:* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam (1957).

For citation: Sultanov, A. Ya., Glebova, M. V., Sultanova, G. A. Differentiation of linear algebras with a unit over a field. DGMF, 54 (2), 54—62 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-5.