

Ю. И. Шевченко¹ , А. В. Вялова² 

¹ Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

² Калининградский государственный технический университет,
Калининград, Россия

¹ ESkrydlova@kantiana.ru, ² vyalova.alexa@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-8

Индукцированные связности двух типов на распределении 2-го рода

В проективном пространстве P_n проведено исследование распределения 2-го рода, не опирающееся на геометрию распределений 1-го рода. Под распределением 2-го рода понимают n -мерное многообразие многомерных плоскостей, полученное сопоставлением каждой точке пространства, не проходящей через нее плоскости. В главном расслоении, ассоциированном с распределением, задана связность. Построено оснащение распределения 2-го рода, которое представляет собой поле плоскостей, образующих в совокупности с образующими точкой и плоскостью трехчленную композицию в смысле Нордена. Доказано, что распределение и его оснащение индуцируют связности двух типов в ассоциированном расслоении. Найдены условия их совпадения.

Ключевые слова: проективное пространство, распределение 2-го типа, связность, оснащение

1. Распределение 2-го рода

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, $(I, \dots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

Поступила в редакцию 25.05.2026 г.

© Шевченко Ю. И., Вялова А. В., 2026

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причем формы Пфаффа ω^I , ω_I^J , ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega_J^I, & D\omega_I &= \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_I^J &= \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \omega_I \wedge \omega^J + \delta_I^J \omega_K \wedge \omega^K. \end{aligned} \quad (1)$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим n -мерное многообразие M_n пар (X, P_m) , состоящее из точки X пространства и сопоставленной ей m -мерной плоскости P_m ($m \leq n - 2$), не проходящей через точку. Многообразие M_n называют распределением m -мерных плоскостей второго рода, а точку X — центром. Впервые понятие распределения 2-го рода было введено Н. М. Остиану [2].

Замечание. Распределение 2-го рода M_n порождает распределение 1-го рода S_n $(m+1)$ -мерных плоскостей $P_{m+1} = [X, P_m]$. Изучению распределения 1-го рода m -мерных плоскостей в n -мерном проективном пространстве посвящены статьи [3; 4], а в работе [10] исследовалась коконгруэнция m -мерных плоскостей, то есть комплекс, который является подмногообразием многообразия Грассмана [9].

Произведем разбиение значений индексов

$$I = (a, \alpha): a, \dots = \overline{1, m+1}; \alpha, \dots = \overline{m+2, n}.$$

Осуществим специализацию подвижного репера, совмещая точку A — вершину репера с центром X и помещая точки A_α в соответствующую данному центру m -мерную плоскость P_m .

Уравнения распределения M_n в репере нулевого порядка имеют вид

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{aI}^\alpha \omega^I, \quad \omega_\alpha = \Lambda_{\alpha I} \omega^I,$$

где компоненты фундаментального объекта 1-го порядка удовлетворяют следующим сравнениям по модулю базисных форм ω^I :

$$\Delta \Lambda_{aI}^\alpha \equiv 0, \quad \Delta \Lambda_{\alpha I} + \Lambda_{\alpha I}^\alpha \omega_\alpha \equiv 0,$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta \Lambda_{aI}^\alpha = d\Lambda_{aI}^\alpha - \Lambda_{bI}^\alpha \omega_a^b - \Lambda_{aJ}^\alpha \omega_I^J + \Lambda_{aI}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Утверждение 1. Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_{aI}^\alpha, \Lambda_{aI}\}$ распределения 2-го рода M_n является тензором, содержащим подтензор Λ_{aI}^α .

При обращении в нуль тензора Λ_{aI}^α получается вырожденное распределение 2-го рода M_m^0 , в котором плоскость P_m пары (A, P_m) смещается в индуцированной центрированной плоскости $P_{m+1}^0 = [A, P_m]$.

В этом случае объект Λ_{aI} становится тензором $\bar{\Lambda}_{aI} = \Lambda_{aI}|_{\Lambda_{aI}^\alpha=0}$, обращение которого в нуль $\bar{\Lambda}_{aI} = 0$ влечет неподвижность плоскости P_m , поэтому вырожденное многообразие M_m^0 превращается в фиксированную пару (X, P_m) .

2. Ассоциированное расслоение

Над распределением M_n возникает главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого является само распределение, а типовым слоем — подгруппа стационарности G_r пары (A, P_m) , где $r = m(m+1) + n(n-m)$.

Структурные уравнения главного расслоения $G_r(M_n)$, ассоциированного с распределением 2-го рода, состоят из уравнений (2_1) и следующих:

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega^I \wedge \omega_{\alpha I}, \\ d\omega_\alpha^a &= \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega^I \wedge \omega_{\alpha I}^a, \\ d\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^I \wedge \omega_{bI}^a + (\Lambda_{bI} \delta_j^a + \\ &\quad + \delta_b^a \delta_j^c \Lambda_{cI}) \omega^I \wedge \omega^j, \\ d\omega_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^I \wedge \omega_{\beta I}^\alpha + \delta_\beta^\alpha \delta_j^a \Lambda_{aI} \omega^I \wedge \omega^j, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha I} &= -\Lambda_{\alpha I} \omega_{\alpha}^a, & \omega_{\alpha I}^a &= -\delta_I^a \omega_{\alpha}, \\ \omega_{b I}^a &= \Lambda_{b I}^a \omega_{\alpha}^a - \delta_b^a \delta_I^{\alpha} \omega_{\alpha}, \\ \omega_{\beta I}^{\alpha} &= -\Lambda_{\alpha I}^{\alpha} \omega_{\beta}^a - \delta_I^{\alpha} \omega_{\beta} - \delta_b^{\alpha} \delta_I^{\gamma} \omega_{\gamma},\end{aligned}$$

причем δ_I^{α} , δ_I^a — обобщенные символы Кронекера (см., например, [5]).

Утверждение 2. *Главное расслоение $G_r(M_n)$ содержит 4 фактор-расслоения: $\{\omega_b^a, \omega^I\}$, $\{\omega_{\beta}^{\alpha}, \omega^I\}$, $\{\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega^I\}$, $\{\omega_{\alpha}^a, \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_b^a, \omega^I\}$ над общей базой — распределением M_n .*

3. Фундаментально-групповая связность

В главном расслоении $G_r(M_n)$ задается связность способом Лаптева — Лумисте (см., например, [6; 7]). Для этого рассмотрим преобразования слоевых форм:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\alpha} &= \omega_{\alpha} - \Gamma_{\alpha I} \omega^I, & \tilde{\omega}_{\alpha}^a &= \omega_{\alpha}^a - \Gamma_{\alpha I}^a \omega^I, \\ \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{b I}^a \omega^I, & \tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta I}^{\alpha} \omega^I.\end{aligned}\quad (3)$$

Вычисляя внешние дифференциалы форм (3) с использованием структурных уравнений (1₁, 2) и теоремы Картана — Лаптева [8], получим

$$\begin{aligned}\Delta \Gamma_{b I}^a + \omega_{b I}^a &\equiv 0, & \Delta \Gamma_{\beta I}^{\alpha} + \omega_{\beta I}^{\alpha} &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha I} + \Gamma_{\alpha I}^{\beta} \omega_{\beta} + \omega_{\alpha I} &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha I}^a - \Gamma_{b I}^a \omega_{\alpha}^b + \Gamma_{\alpha I}^{\beta} \omega_{\beta}^a + \omega_{\alpha I}^a &\equiv 0.\end{aligned}$$

Утверждение 3. *Объект связности $\Gamma = \{\Gamma_{b I}^a, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}, \Gamma_{\alpha I}, \Gamma_{\alpha I}^a\}$ содержит 2 простейших подобъекта: $\{\Gamma_{b I}^a\}$ — плоскостной линейной связности, $\{\Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$ — нормальной линейной связности и 2 простых подобъекта: центропроективной связности $\{\Gamma_{\alpha I}, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$ и аффинно-групповой связности $\{\Gamma_{\alpha I}^a, \Gamma_{b I}^a, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$.*

4. Композиционное оснащение

Осуществим оснащение распределения 2-го рода, присоединив к каждой паре (A, P_m) рассматриваемого семейства M_n плоскость P_{n-m-2} , не пересекающую индуцированную плоскость P_{m+1} .

Плоскость P_{n-m-2} зададим совокупностью точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A.$$

Инвариантность плоскости обеспечивается дифференциальными уравнениями

$$\Delta \lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha I}^a \omega^I, \quad \Delta \lambda_\alpha + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha I} \omega^I. \quad (4)$$

Утверждение 4. *Оснащающая плоскость P_{n-m-2} задается квазитензором $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, состоящим из двух простейших подквазитензоров $\{\lambda_\alpha^a\}, \{\lambda_\alpha\}$, причем $\{\lambda_\alpha^a\}$ определяет плоскость $P_{n-m-1} = P_{n-m-2} \oplus A$, а $\{\lambda_\alpha\}$ — гиперплоскость $P_{n-1} = [B_\alpha, A_\alpha]$.*

Действительно, в этом несложно убедиться, задав плоскости P_{n-m-1} и P_{n-1} совокупностями точек

$$A, C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a; \quad A_\alpha, D_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha A$$

и найдя условия их инвариантности.

5. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные

Подставляя в дифференциальные уравнения для компонент оснащающего квазитензора λ вместо слоевых форм их выражения через соответствующие формы связности и переноса слагаемые с базисными формами вправо, получим

$$\nabla \lambda_\alpha^a = \nabla_I \lambda_\alpha^a \omega^I, \quad \nabla \lambda_\alpha = \nabla_I \lambda_\alpha \omega^I.$$

Выражения в левых частях уравнений — ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора относительно фундаментально-групповой связности с объектом Γ :

$$\nabla \lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a - \lambda_\beta^a \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^b \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_\alpha^a, \quad \nabla \lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \tilde{\omega}_\alpha,$$

а справа коэффициенты при базисных формах — ковариантные производные:

$$\nabla_I \lambda_\alpha^a = \lambda_{\alpha I}^a + \lambda_\beta^a \Gamma_{\alpha I}^\beta - \lambda_\alpha^b \Gamma_{b I}^a - \Gamma_{\alpha I}^a, \quad \nabla_I \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha I} + \lambda_\beta \Gamma_{\alpha I}^\beta - \Gamma_{\alpha I}$$

Продолжая уравнения (4), получим дифференциальные сравнения на пфаффовы производные компонент оснащающего квазитензора λ

$$\Delta \lambda_{\alpha I}^a + \lambda_\alpha^b \omega_{b I}^a - \lambda_\beta^a \omega_{\alpha I}^\beta + \omega_{\alpha I}^a \equiv 0, \quad \Delta \lambda_{\alpha I} - \lambda_\beta \omega_{\alpha I}^\beta + \omega_{\alpha I} \equiv 0.$$

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Распределение M_n и его оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G_r(M_n)$ фундаментально-групповую связность 1-го типа с объектом*

$$\Gamma = \{\Gamma_{bI}^a, \Gamma_{\beta I}^\alpha, \Gamma_{\alpha I}^{01}, \Gamma_{\alpha I}^{01}\},$$

компоненты которого охвачены по формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_{bI}^a &= \Lambda_{bI}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_b^a \delta_I^\alpha \lambda_\alpha, \\ \Gamma_{\beta I}^\alpha &= -\Lambda_{\alpha I}^\alpha \lambda_\beta^a - \delta_I^\alpha \lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha \delta_I^\gamma \lambda_\gamma; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha I}^{01} &= -\Lambda_{\alpha I}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_I^\beta \lambda_\beta \lambda_\alpha, \\ \Gamma_{\alpha I}^{01} &= -\Lambda_{bI}^\beta \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^b - \delta_I^a \lambda_\alpha \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. *Распределение M_n и его оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G_r(M_n)$ фундаментально-групповую связность 2-го типа с объектом*

$$\Gamma = \{\Gamma_{bI}^a, \Gamma_{\beta I}^\alpha, \Gamma_{\alpha I}^{02}, \Gamma_{\alpha I}^{02}\},$$

компоненты которого охвачены по формулам (5) и следующим:

$$\begin{aligned} \overset{02}{\Gamma}_{\alpha I} &= \lambda_{\alpha I} - \lambda_{\beta} \Lambda_{\alpha I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^a - \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta} \lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha} \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta}, \\ \overset{02}{\Gamma}_{\alpha I}^a &= \lambda_{\alpha I}^a - \lambda_{\beta}^a \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^b - \lambda_{\beta}^a \delta_I^{\beta} \lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha}^b \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\beta}^a. \end{aligned} \quad (7)$$

Сопоставляя равенства (6) и (7), получим соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha I} &= \Lambda_{\alpha I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^a \lambda_{\beta} + \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta} \lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha I}^a \lambda_{\alpha}^a, \\ \lambda_{\alpha I}^a &= \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^b \lambda_{\beta}^a + \delta_I^{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}^a - \delta_I^a \lambda_{\alpha}^a, \end{aligned}$$

которые являются условиями совпадения связностей 1-го и 2-го типов.

Список литературы

1. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
2. Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.
3. Омелян О. М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения // Матем. заметки. 2017. Т. 102, №6. С. 896—907.
4. Омелян О. М. Геометризация пучка связностей первого типа, порожденного композиционным оснащением на распределении плоскостей // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2020. Т. 180. С. 69—73.
5. Шевченко Ю. И. Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова // Фундам. прикл. матем. 2010. Т. 16, №2. С. 155—161.
6. Полякова К. В., Шевченко Ю. И. Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.
7. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 185—193.
8. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНТИ. М., 1979. Т. 9.
9. Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14, №2. С. 29—67.

10. Белова О. О. Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (1). С. 39—48.

Для цитирования: Шевченко Ю. И., Вялова А. В. Индуцированные связности двух типов на распределении 2-го рода // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 93—101. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-8>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2010: 53A20, 53B15

Yu. I. Shevchenko¹, A. V. Vyalova²

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia
14, A. Nevskogo st., Kaliningrad, 236016, Russia

² Kaliningrad State Technical University
1, Sovietsky prosp., Kaliningrad, 236022, Russia

¹ ESkrydlova@kantiana.ru, ² vyalova.alex@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-8

Induced connections of two types on a distribution of the second kind

Submitted on May 25, 2026

In a projective space a distribution of the second kind independently of the geometry of distributions of the first kind is studied. A distribution of the second kind is understood as an n -dimensional manifold of multidimensional planes obtained by assigning to each point of the space a plane not passing through that point. In the principal bundle associated with the distribution, a connection is given. An equipment of the distribution of the second kind is constructed; it is a field of planes that, together with the generating point and the generating plane, forms a three-term composition in the sense of Norden. It is proved that the distribution and its equipment induce connections of two types in the associated bundle. Conditions for the coincidence of these connections are found.

Keywords: projective space, distribution of the second kind, connection, equipment

References

1. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothing of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).
2. *Ostianu, N. M.* Distribution of hyperplane elements in projective space. Tr. Geom. sem., 4, 71—120 (1973).
3. *Omelyan, O. M.* About a coincidence of group connections induced by an internal composition equipment of a distribution. *Math. Notes*, **102**:6, 896—907 (2017).
4. *Omelyan, O. M.* Geometrization of a sheaf of first-type connections generated by a compositional frame on a distribution of planes. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 180, 69—73 (2020).
5. *Shevchenko, Yu. I.*: Degeneration of plane affine Stolyarov connections. Fund. i Prikl. Mat., **16**:2, 155—161 (2010).
6. *Polyakova, K., Shevchenko, Yu.*: Laptev — Lumiste's methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 49, 19—28 (2018).
7. *Shevchenko, Yu.*: Laptev's and Lumiste's ways of connection representation in the principal fibre bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).
8. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.*: Differential-geometric structures on manifolds. Itogi Nauki i Tekhn. Probl. Geom., 9, Moscow (1979).
9. *Belova, O. O.*: Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).
10. *Belova, O. O.*: The deformation pseudotensor of connections in congruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(1), 39—48 (2023).

For citation: Shevchenko, Yu. I., Vyalova, A. V.: Induced connections of two types on a distribution of the second kind. DGMF, 57 (1), 93—101 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-8>.

