тогда и только тогда является фокусом луча A_1A_2 прямолиней

конгруэнции (A_1A_2), когда фокальная поверхность (A_j) конгру

(C_i) вырождается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка $\bar{F}=\ell_1\bar{A}_1+\ell_2\bar{A}_2$ я

ся фокусом прямой A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2), то имеем:

$$\Gamma_1^{o2}(\ell_1)^2+(\Gamma_2^{o2}-\Gamma_1^{o1})\ell_1\ell_2-\Gamma_2^{o1}(\ell_2)^2=0.$$

Отсюда видим, что A_j тогда и только тогда является фокус

луча A_1A_2, когда $\Gamma_j^{oi}=0$. Так как $d\bar{A}_j=\omega_j^j\bar{A}_j+\omega_j\bar{A}_3+(\Gamma_j^{oj}\omega_j+$

то теорема доказана.

Пары B° обладают ещё многими интересными геометрически

свойствами.

Л и т е р а т у р а

I. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многоо

зий. Труды Московского матем. общества, т.2, 275-383, ГИТТЛ,

2. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в

мерном проективном пространстве. Геом. сб. вып.3 (Труды То

университета 168), 28-42, 1963.

3. В.С.Малаховский, Расслояемые пары конгруэнций фигур. Тру

семинара, т.3, 1971 (печатается).

4. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.-Л., 19

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1971

вып 2

Г Р И Ц Е Н К О В.А.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНОГО ВЫРОЖДЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Исследуется n-мерное многообразие квадратичных элементов [I]

-мерного проективного пространства P_n, гиперплоскости которых

разуют $(n-1)$-мерное многообразие. Построен основной фундамен-

льный объект многообразия $(n-1, n, n)^2$. Выделена система тен-

ров и квазитензоров многообразия $(n-1, n, n)^2$. При $n=3$ такие

огообразия были рассмотрены В.С.Малаховским [2].

§ I. Система дифференциальных уравнений многообразия $(n-1,n,n)^2$.

Отнесем проективное пространство P_n к реперу $\{\bar{M}_{\alpha'}\}$ $(\alpha'=1,\dots,n+1)$.

авнения инфинитезимальных смещений репера имеют вид

$$d\bar{M}_{\alpha'}=\omega_{\alpha'}^{\beta'}\bar{M}_{\beta'},$$

е формы $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'}=\omega_{\alpha'}^{\gamma'}\wedge\omega_{\gamma'}^{\beta'}.$$

авнения квадратичного элемента пространства P_n запишутся в

где

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0\ ,\ x^{n+1}=0\ ,\ \det(a_{\alpha\beta})=1\ \ (\alpha,\beta,\gamma\ldots=1,\dots,n) \qquad (1.1)$$

рмы Пфаффа

$$\omega_\alpha^{n+1}\equiv\omega_\alpha,\ \ \Theta_{\alpha\beta}\equiv da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma-a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma+\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma$$

суть главные формы многообразия квадратичных элементов.Имее
место тождество [I]: $a^{\alpha\beta}\Theta_{\alpha\beta}=0.$ (

Наряду с пространством P_n рассмотрим n-мерное пространс
S_n, в котором действует бесконечная аналитическая группа пре
разований.Обозначим инвариантные формы этой группы через τ
Формы τ^α образуют вполне интегрируемую систему форм и подчи
следующим структурным уравнениям [4]:

$$\mathcal{D}\tau^\alpha=\tau^\gamma\wedge\tau^\alpha_\gamma,\quad \mathcal{D}\tau^\alpha_\beta=\tau^\gamma_\beta\wedge\tau^\alpha_\gamma+\tau^\gamma\wedge\tau^\alpha_{\beta\gamma},$$

$$\mathcal{D}\tau^\alpha_{\gamma_1\dots\gamma_r}=\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s!(r-s)!}\tau^\beta_{(\gamma_1\dots\gamma_s}\wedge\tau^\alpha_{\gamma_{s+1}\dots\gamma_r)\beta}+\tau^\beta\wedge\tau^\alpha_{\gamma_1\dots\gamma_r\beta}.$$

Пространство S_n будем называть пространством параметров

Многообразие $(n-1,n,n)^2$ можно задать в параметрической
ме следующей системой дифференциальных уравнений [4],[5]:

$$\omega_\alpha=\lambda_{\alpha\gamma}\tau^\gamma,\quad \Theta_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta\gamma}\tau^\gamma$$

Система (I.3) правильно продолжаема [3],[4].Её последова
ные продолжения приводят к бесконечной последовательности ф
ций $\lambda_{\alpha\gamma},\ b_{\alpha\beta\gamma};\ \lambda_{\alpha\gamma\eta},\ b_{\alpha\beta\gamma\eta};\ \dots,$
которые и определяют дифференциальную геометрию данного по
женного многообразия (I.3).

Как легко проверить,эти функции удовлетворяют следующей
теме дифференциальных уравнений:

$$d\lambda_{\alpha\gamma}=\lambda_{\alpha\eta}\tau^\eta_\gamma+\lambda_{\eta\gamma}\omega^\eta_\alpha-\lambda_{\alpha\gamma}\omega^{n+1}_{n+1}+\lambda_{\alpha\gamma\eta}\tau^\eta,$$

$$db_{\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\beta\eta}\tau^\eta_\gamma+b_{\alpha\eta\gamma}\omega^\eta_\beta+b_{\eta\beta\gamma}\omega^\eta_\alpha-\frac{2}{n}b_{\alpha\beta\gamma}\omega^\eta_\eta+$$

$$+(a_{\alpha\eta}\lambda_{\beta\gamma}+a_{\eta\beta}\lambda_{\alpha\gamma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\lambda_{\eta\gamma})\omega^\eta_{n+1}+b_{\alpha\beta\gamma\eta}\tau^\eta.$$

Из уравнений (I.4) видно,что система величин $\{a_{\alpha\beta},\lambda_{\alpha\gamma},$
образует геометрический объект.Этот объект мы будем назы

ундаментальным объектом I-го порядка многообразия $(n-1,n,n)^2$.

§ 2. Основной объект многообразия $(n-1,n,n)^2$.

Т е о р е м а . Фундаментальный объект I-го порядка $=\{a_{\alpha\beta},\lambda_{\alpha\gamma},b_{\alpha\beta\gamma}\}$ является основным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения основного объек-
[3] следует,что надо доказать алгебраическую разрешимость
стемы дифференциальных уравнений

$$\delta a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta+a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma,$$
$$\delta\lambda_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\gamma}\tau^\gamma_\beta+\lambda_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-\lambda_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1},\qquad (2.1)$$
$$\delta b_{\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\beta\eta}\tau^\eta_\gamma+b_{\alpha\eta\gamma}\pi^\eta_\beta+b_{\eta\beta\gamma}\pi^\eta_\alpha-\frac{2}{n}b_{\alpha\beta\gamma}\pi^\eta_\eta+$$
$$+(a_{\alpha\eta}\lambda_{\beta\gamma}+a_{\eta\beta}\lambda_{\alpha\gamma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\lambda_{\eta\gamma})\pi^\eta_{n+1}$$

носительно всех вторичных форм.Так как система дифференциаль-
х уравнений (2.I) вполне интегрируема,то начальные значения
ндаментального объекта первого порядка можно задавать произ-
льно,с учетом тождества (I.2).

Зададим для компонент Γ_1 следующие начальные значения:

$$a_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta},\ \lambda_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta},\ b_{iii}=1\quad (i=1,2,\dots,n-1),$$
$$b_{nnn}=1-n,\ b_{\alpha\beta\beta}=\delta_{\alpha\beta},\ b_{\alpha\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\quad (\alpha\ne\beta),\qquad (2.2)$$
$$b_{\alpha\beta\gamma}=0,\quad \alpha\ne\beta,\ \alpha\ne\gamma,\ \beta\ne\gamma$$

получим:

$$\tilde\pi^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha}-\frac1n\tilde\pi^\gamma_\gamma=\frac12\delta\tilde a_{\tilde\alpha\tilde\alpha},\quad \text{(по } \tilde\alpha \text{ не суммировать!)}$$
$$\tilde\tau^\alpha_\beta+\tilde\pi^\beta_\alpha=\delta\tilde\lambda_{\alpha\beta}\quad (\alpha\ne\beta),$$
$$+2\tilde\pi^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha}+(2-\frac2n)\tilde\pi^\alpha_{n+1}][1+(1-n)\delta^n_\alpha]=\delta\tilde b_{\tilde\alpha\tilde\alpha\tilde\alpha},\qquad (2.3)$$
$$\tilde\tau^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha}+\pi^{\tilde\alpha}_{\tilde\alpha}-\tilde\pi^{n+1}_{n+1}=\delta\tilde\lambda_{\tilde\alpha\tilde\alpha},$$
$$\delta\tilde b_{\tilde\alpha\tilde\alpha\beta}=\tilde\tau^\alpha_\beta-\frac2n\tilde\pi^\beta_{n+1}\quad (\alpha\ne\beta),$$

$$\delta \tilde{b}_{\alpha\beta\beta} = \tilde{\pi}^{\beta}_{\alpha} + \tilde{\pi}^{\alpha}_{n+1} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Откуда для определения π^{α}_{n+1} получаем систему

$$\tilde{\pi}^{\alpha}_{n+1} - \frac{2}{n^2}\sum_{K} \tilde{\pi}^{K}_{n+1} = \frac{1}{n}\,\delta\Big(\sum_{\beta}^{n+1}(b_{\alpha\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\beta} - \lambda_{\alpha\beta})\Big).$$

Из (2.3) находим π^{α}_{α}. После чего легко находим и остальны

формы

$$\tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta} = \delta \tilde{b}_{\alpha\alpha\beta} + \frac{2}{n}\tilde{\pi}^{\beta}_{n+1} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\tilde{\pi}^{\beta}_{\alpha} = \delta \lambda_{\alpha\beta} - \tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\tilde{\tau}^{\alpha}_{\alpha} = c^{-1}\,\delta \tilde{b}_{\alpha\alpha\alpha} - 2\,\tilde{\pi}^{\alpha}_{\alpha} - \Big(2 - \frac{2}{n}\Big)\tilde{\pi}^{\alpha}_{n+1}, \text{ где } c = 1 + (1-n)\delta$$

$$\tilde{\pi}^{n+1}_{n+1} = -\delta\Big(\sum_{\alpha}\tilde{\lambda}_{\alpha\alpha}\Big) + \tilde{\tau}^{\alpha}_{\alpha} + \tilde{\pi}^{\alpha}_{\alpha}.$$

§3. Обращенный тензор второй валентности.

Предположим, что для семейства индуцированных гиперплоск
тей построен некоторый относительный инвариант J, охваче
фундаментальным объектом I-го порядка $J = J(\lambda_{\alpha\beta})$. Тогда мож
ввести обращенный тензор [5] $V^{\alpha\beta}$. Компоненты $V^{\alpha\beta}$ удовлетво
дифференциальным уравнениям

$$dV^{\alpha\beta} = V^{\alpha\beta}_{\gamma}\tau^{\gamma} - V^{\alpha\gamma}\tau^{\beta}_{\gamma} - V^{\gamma\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} + V^{\alpha\beta}\omega^{n+1}_{n+1}.$$

Компоненты объекта $V^{\alpha\beta}$ связаны с компонентами $\lambda_{\alpha\beta}$ сл
щими конечными соотношениями:

$$V^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta} = n,\quad V^{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},\quad V^{\alpha\beta}\lambda_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}.$$

§ 4. Квазитензор b^{β}.

Рассмотрим систему величин:

$$b^{\rho}_{\alpha\beta} = V^{\rho\gamma} b_{\alpha\beta\gamma},$$

$$\delta b^{\rho}_{\alpha\beta} = b^{\rho}_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta} + b^{\rho}_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \frac{2}{n} b^{\gamma}_{\alpha\beta}\pi^{\rho}_{\gamma} + b^{\rho}_{\alpha\beta}\pi^{n+1}_{n+1} + \Big(a_{\alpha\gamma}\delta^{\rho}_{\beta} + a_{\gamma\beta}\delta^{\rho}_{\alpha} - \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\delta^{\rho}_{\gamma}\Big)\pi^{\gamma}_{n+1}.$$

видно из (4.2) система величин (4.I) вместе с величинами
$\}$ образует линейный геометрический объект

Рассмотрим систему величин: $b^{\beta} = b^{\beta}_{\alpha\beta}$, (4.3)

$$= b_{\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \frac{2}{n} b_{\alpha}\pi^{\gamma}_{\gamma} + b_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1} + \frac{n^2+n-2}{n} a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{n+1}. \qquad (4.4)$$

Как видно из (4.4) система величин $\{b_{\alpha}\}$ самостоятельного
екта не образует. Рассмотрим систему величин:

$$b^{\beta} = a^{\alpha\beta} b_{\alpha}, \qquad (4.5)$$

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},\quad \delta b^{\beta} = -b^{\gamma}\pi^{\beta}_{\gamma} + b^{\beta}\pi^{n+1}_{n+1} + \frac{n^2+n-2}{n}\pi^{\gamma}_{n+1}. \qquad (4.6)$$

(4.6) видно, что система величин $\{b^{\beta}\}$ образует квазитензор. Для
метрической характеристики квазитензора b^{β} рассмотрим точку

$$\bar{A} = b^{\beta}\bar{M}_{\beta} + \frac{2-n(n+1)}{n}\bar{M}_{n+1}. \qquad (4.7)$$

зывается

$$\delta A = \pi^{n+1}_{n+1}\bar{A}.$$

им образом квазитензор b^{β} определяет инвариантную точку $\bar{A}$,
нцидентную гиперплоскости квадратичного элемента.

Литература

.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-ном проективном пространстве. Геом. сб., вып. 3, Труды Томского та, т. I68, стр. 28-42, I963.

.С.Малаховский, Комплексы кривых второго порядка в трехмерном ективном пространстве. Геом.сб., вып. 4, Труды Томского ун-та, 4, т. I76, 28-36.

.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий удн Московского математического общества, 2, I953, ГИТТЛ.

.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия многомерных поверхнос. "Геометрия", I963 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР) М. I965, 5-64.

.М.Остиану, Об инвариантном оснащении семейства многомерных скостей в проективном пространстве. Труды геом.сб., т. 2, М. I969.