T. Nekipelova, V. Tsyrenova

Elastic interaction of cylinder

In the work we compute the maximum local stresses in the contact zone of the cylinder with a rigid element. The initial decision is made in terms of displacements. To solve the problem, we use a uniform grid on each of three axis directions.

УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур

Продолжается исследование многообразия, проводимое ковариантным методом в работе [7] и опирающееся на деривационные формулы и структурные уравнения.

Ключевые слова: деривационная формула, структурные уравнения, пфаффовы производные, скобка Ли, тангенциальнозначные формы.

1. Базисные и слоевые координаты на многообразии. Рассмотрим m-мерное гладкое многообразие X_m, некоторую окрестность, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i и линейно независимые 1-формы [5] $\omega^i = x^i_j dx^j$ $(i, j, k = \overline{1,m})$. Требование линейной независимости форм ω^i равносильно условию $\det\left(x^i_j\right) \neq 0$. Система $\omega^i = x^i_j dx^j$

разрешима относительно дифференциалов dx^i: $dx^i = \overset{*}{x}{}^i_j \omega^j$, где $\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}^i_j \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к матрице $\left(x_i^j\right)$. Дифференцируя формы ω^i внешним образом, получим структурные уравнения Лаптева [5]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{1}$$

где $\omega_j^i = -\overset{*}{x}{}^k_j dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k$ $(x_{jk}^i = x_{kj}^i)$. Переменные x_j^i, x_{jk}^i называются *слоевыми координатами* [5].

Деривационная формула, т.е. выражение для дифференциала точки M многообразия X_m, имеет вид [1]

$$dM = \omega^i \varepsilon_i, \tag{2}$$

где ε_i — базисные векторы касательного векторного пространства $T_M X_m$, ω^i — структурные формы многообразия X_m. Дифференциальные 1-формы ω^i образуют кобазис, сопряженный к базису $\{\varepsilon_i\}$, т.е. $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$.

Замечание 1. Относительно натурального репера $\{\partial_i\}$ векторы ε_i раскладываются по формуле $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$, поэтому $dM = dx^i \partial_i$.

Из структурных уравнений Лаптева (1) следует, что структурные формы ω^i дифференцируемого многообразия X_m образуют так называемую полную совокупность форм, а система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема и фиксирует точку $M \in X_m$.

2. Пфаффовы производные функции на многообразии. Пусть на многообразии X_m задана скалярная функция f. Ее дифференциал df определяет в двойственном касательном пространстве $T_M^* X_m$ поле ковектора $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. При переходе к новым координатам $y^i = y^i(x^j)$ имеем $\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$.

Переходя к произвольному кореперу $\{\omega^i\}$, получим $df = \overset{\omega}{\partial}_i f \, \omega^i$, где величины $\overset{\omega}{\partial}_i f = \partial_j f \, \overset{*}{x}{}_i^j$ называются *пфаффовыми производными функции* f *по отношению к кореперу* $\{\omega^i\}$) и являются координатами указанного ковекторного поля [3, с. 67].

Рассматривая действие дифференциала df на базисных векторах ε_i, получим

$$df(\varepsilon_i) = \overset{\omega}{\partial}_j f \, \omega^j(\varepsilon_i) = \overset{\omega}{\partial}_i f, \tag{3}$$

т. е. касательные векторы ε_i выступают операторами пфаффовых (частных в репере $\{\omega^i\}$) дифференцирований функций: $\varepsilon_i(f) = df(\varepsilon_i) = \overset{\omega}{\partial}_i f$. Можно обозначить $\partial_{\varepsilon_i} f = \overset{\omega}{\partial}_i f$ или еще короче $\partial_{\varepsilon_i} f = f_i$. Далее будем также использовать выражение пфаффовых производных через частные:

$$f_i = \partial_j f \, \overset{*}{x}{}_i^j. \tag{4}$$

Формула (3) в более короткой записи принимает следующий вид:

$$df = f_i \, \omega^i. \tag{3'}$$

Покажем инвариантность формы (3′), используя обозначения $\overset{x}{f}_i$, $\overset{y}{f}_i$ для пфаффовых производных функции f в координатах x^i, y^i:

$$df = \overset{y}{f}_i \overset{y}{\omega}^i = \underbrace{\partial_j \overset{y}{f} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}}_{\partial_k \overset{x}{f}} \overset{*}{x}{}^k_l \overset{x}{\omega}^l = \underbrace{\partial_k \overset{x}{f} \overset{*}{x}{}^k_i}_{\overset{x}{f}_i} \overset{x}{\omega}^i = \overset{x}{f}_i \overset{x}{\omega}^i .$$

Проведенные выкладки приводят к формуле

$$\overset{y}{f}_i = \overset{x}{f}_l x^l_k \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \overset{*}{y}{}^j_i ,$$

выражающей связь между пфаффовыми производными функции, заданными в разных координатах, при этом формула преобразования корепера имеет вид: $\overset{y}{\omega}^i = y^i_l \frac{\partial y^l}{\partial x^k} \overset{*}{x}{}^k_j \overset{x}{\omega}^j$.

2. Пфаффовы производные 2-го порядка для функции на многообразии. Известное свойство внешнего дифференциала от произведения двух форм, одна из которых имеет нулевую степень, т. е. функция, сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Если* $\omega = \omega^i g_i$ *— линейная комбинация 1-форм, коэффициентами которой являются функции (т. е. 0-формы)* g_i *на многообразии* X_m*, то внешний дифференциал действует по закону*

$$d:\ \omega = g_i \omega^i \in T^*_M(X_m) = \Omega^0_1 \ \to d\omega = g_i d\omega^i + dg_i \wedge \omega^i \in \Omega^0_2 .$$

Лемма *Картана*. *Пусть для 1-форм* θ_α *и линейно независимых 1-форм* ω^α ($\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^r \neq 0$, $\alpha = \overline{1,r}$) *имеет место равенство* $\theta_\alpha \wedge \omega^\alpha = 0$. *Тогда однозначно определены такие гладкие функции* $C_{\alpha\beta}$, *что* $\theta_\alpha = C_{\alpha\beta}\, \omega^\beta$, *причем* $C_{[\alpha\beta]} = 0$.

Далее обобщим лемму 1 на случай, когда коэффициентами линейной комбинации форм являются векторы, а не функции, а также покажем, что лемма Картана также справедлива в векторной форме, точнее, для векторнозначных форм.

Дифференцируя выражение (3′) внешним образом, получим уравнения $\left(df_i - f_j\,\omega_i^j\right)\wedge\omega^j = 0$, разрешая которые по лемме Картана придем к уравнениям на пфаффовы производные f_i функции f :

$$df_i - f_j\,\omega_i^j = f_{ij}\omega^j \;\; (f_{ij} = f_{ji}), \qquad (5)$$

где f_{ij} — *пфаффовы производные 2-го порядка.* Уравнения (5) можно записать в виде $\Delta f_i = f_{ij}\omega^j$, где $\Delta f_i = df_i - f_j\,\omega_i^j$ — *тензорный дифференциальный оператор*.

Переходя в формуле (5) к реперу $\{dx^i\}$, получим:

$$d(\partial_j f)\overset{*}{x}{}_i^j + \partial_j f d\overset{*}{x}{}_i^j = f_j\,(-\overset{*}{x}{}_i^l dx_l^j - x_{il}^j\omega^l) + f_{ij}\omega^j .$$

Свернем последнее равенство с матрицей x_k^i :

$$d(\partial_j f)\overset{*}{x}{}_i^j x_k^i + \partial_j f d\overset{*}{x}{}_i^j x_k^i = f_j\,(-\overset{*}{x}{}_i^l dx_l^j - x_{il}^j\omega^l)x_k^i + f_{ij}\omega^j x_k^i ,$$

тогда

$$d(\partial_k f) - \underbrace{\partial_j f\,\overset{*}{x}{}_i^j}_{f_i} dx_k^i = -f_j\,dx_k^j - f_j\,x_{il}^j\omega^l x_k^i + f_{ij}\omega^j x_k^i .$$

Приводим подобные, сворачиваем с обратной матрицей $\overset{*}{x}{}_l^k$:

$$\partial_{ki} f \underbrace{dx^i}_{\overset{*}{x}{}_j^i\omega^j} \overset{*}{x}{}_l^k = -f_s\,x_{lj}^s\omega^j + f_{lj}\omega^j .$$

Собирая слагаемые при базисных формах и учитывая их линейную независимость, получим выражение для пфаффовых производных второго порядка:

$$f_{ij} = \partial_{kl} f \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j + \partial_l f \overset{*}{x}{}^l_k x^k_{ij} . \qquad (5')$$

Утверждение 1. *Линейный однородный закон* $\Delta f_i = f_{ij}\omega^j$ *для пфаффовых производных* f_i *функции* f *в корепере* $\{\omega^i\}$ *эквивалентен выражению* (5′) *для повторных пфаффовых производных через частные производные 1-го и 2-го порядков и слоевые координаты* x^i_j, x^i_{jk}.

Таким образом, пфаффовы производные f_{ij} 2-го порядка, в отличие от частных производных $\partial_{ij} f = \dfrac{\partial f(x^k)}{\partial x^i \partial x^j}$ 2-го порядка, связаны с многообразием на более высоком уровне, так как включают не только базисные координаты x^i, но и слоевые координаты x^i_j, x^i_{jk}.

3. Производная функции по направлению вектора. Для вектора $x = x^i \varepsilon_i \in T_M X_m$ с помощью (3′) имеем выражение для производной функции f по направлению вектора x:

$$\partial_x f = x(f) = df(x) = x^i f_i \ . \qquad (6)$$

Свойства производной $\partial_x f$ при этом формализме сохраняются:

$$\partial_x f = \partial_{x^i \varepsilon_i} f = x^i \partial_{\varepsilon_i} f = x^i \overset{\omega}{\partial_x} f = x^i f_i . \qquad (7)$$

4. Тангенциальнозначные формы и их дифференцирования. Форма смещения. Из деривационной формулы (2) видим, что dM можно рассматривать как векторнозначную 1-форму со значениями в касательном пространстве $T_M X_m$, т. е. тангенциальнозначную 1-форму. Обозначим множество всех тангенциальнозначных 1-форм со значениями в пространстве $T_M X_m$ через $\Omega_1^1 = \Omega_1 (T_M X_m)$. Касательные векторы будем считать тангенциальнозначными 0-формами, т.е. $\Omega_0^1 = \Omega_0 (T_M X_m)$ — множество всех тангенциальнозначных 0-форм, поэтому $\Omega_0^1 = T_M X_m$. Аналогично $\Omega_2^1 = \Omega_2 (T_M X_m)$ — множество всех тангенциальнозначных 2-форм со значениями в касательном пространстве $T_M X_m$, $\Omega_2^2 = \Omega_2 (T_M^2 X_m)$ — множество всех тангенциальнозначных форм со значениями в соприкасающемся (касательном 2-го порядка) пространстве $T_M^2 X_m$.

Действуя формой dM на векторы ε_j, $x = x^j \varepsilon_j$:

$$dM(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \omega^i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j, \quad dM(x) = \varepsilon_i x^j \omega^i(\varepsilon_j) = x^j \varepsilon_j = x,$$

видим, что она соответствует тождественному преобразованию касательного пространства $T_M X_m$, т.е. является *канонической формой* [3, с. 118], *формой смещения* [2, с. 117] или *структурной формой расслоения* [4, с. 48]. Учитывая геометрический смысл формулы (2), форму $dM = \omega^i \varepsilon_i$ будем называть *формой смещения*.

Замечание 2. Значок тензорного умножения часто опускают [6, с. 290].

Обобщением леммы 1 на случай, когда коэффициентами линейной комбинации форм являются векторы, а не функции, служит

Определение. *Если* $\omega = \omega^i \varepsilon_i$ *— векторнозначная (тангенциальнозначная) 1-форма, то внешний дифференциал может действовать следующими двумя способами:*

1) $\bar{d}: \omega \in \Omega_1^1 = \Omega_1(T_M X_m) \to \bar{d}\omega = \varepsilon_i d\omega^i \in \Omega_2^1 = \Omega_2(T_M X_m)$;

2) $d: \omega \in \Omega_1^1 = \Omega_1(T_M X_m) \to$

$\to d\omega = \varepsilon_i d\omega^i - \omega^i \wedge d\varepsilon_i \in \Omega_2^2 = \Omega_2(T_M^2 X_m)$,

$\varepsilon_i \in \Omega_0^1 = \Omega_0(T_M X_m)$, *причем внешние дифференциалы скалярных форм* $d\omega^i$ *в обоих случаях одинаковы.*

Видим, что в первом случае увеличивается степень формы, но не порядок касательного пространства, в котором она принимает значения. А во втором случае увеличивается и степень формы, и порядок касательного пространства, в котором она принимает значения, поскольку дифференцируется и 1-формы ω^i и 0-формы ε_i.

Современный контравариантный метод использует способ 1, в то время как способ 2 в ковариантном методе является более плодотворным.

Лемма Картана справедлива и в векторной форме, точнее для векторнозначных форм, поскольку от векторной записи векторнозначных форм можно перейти к координатной записи.

Лемма 3. *Пусть для векторнозначных 1-форм* θ_α *и линейно независимых 1-форм* ω^α ($\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^r \neq 0$, $\alpha = \overline{1,r}$) *имеет место равенство* $\theta_\alpha \wedge \omega^\alpha = 0$. *Тогда однозначно определены такие векторы* $C_{\alpha\beta}$, *что* $\theta_\alpha = C_{\alpha\beta}\,\omega^\beta$, *причем* $C_{[\alpha\beta]} = 0$.

Дифференцируя внешним образом уравнение (2) первым способом, получим $\bar{d}(dM) = \omega^j \wedge \omega_j^i \varepsilon_i$.

Дифференцируя внешним образом уравнение (2) вторым способом и разрешая по лемме Картана, получим

$$\Delta^{\varepsilon_i} = \omega^j \varepsilon_{ij}, \tag{8}$$

где оператор Δ действует по закону:

$$\Delta \varepsilon_i = d\varepsilon_i - \omega_i^j \varepsilon_j .$$

Новые векторы ε_{ij}, принадлежащие касательному пространству 2-го порядка $T_M^2 X_m$, симметричны.

Замечание 4. Выражение (3′) аналогично деривационной формуле (2), поэтому ее дифференциальные следствия (5) имеют вид аналогичный следствиям (8) деривационных формул (2).

Замечание 5. Дифференцируя формулу (2) обычным образом, получим

$$d^2 A = (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i)\varepsilon_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij},$$

наглядно показывающую, что касательное пространство 2-го порядка $T_M^2 X_m$ натянуто на векторы ε_i, ε_{ij}, т. е.

$$T_M^2 X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}) .$$

Пространство $T_M^2 X_m$ обобщает соприкасающуюся плоскость кривой трехмерного пространства, поэтому его также называют его соприкасающимся пространством.

5. Координатное представление векторов соприкасающегося пространства. Векторы ε_{ij} являются пфаффовыми производными векторов ε_i, т. е. [4, с. 113] $\varepsilon_{ij} = \overset{\omega}{\partial}_j \varepsilon_i$. По аналогии с выводом пфаффовых производных второго порядка для функции, используя обозначения $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$ и преобразования репера $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j$, из уравнений (8) можно найти выражение для пфаффовых производных ε_{ij} векторов ε_i:

$$\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^k \overset{*}{x}{}_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k \overset{*}{x}{}_k^l \partial_l . \tag{9}$$

Утверждение 2. *Тензорный закон (8) для векторов* ε_i *в корепере* $\{\omega^i\}$ *эквивалентен выражению (9) для пфаффовых производных* ε_{ij} *через операторы частных дифференцирований 1-го и 2-го порядков и слоевые координаты* x^i_j, x^i_{jk}.

Таким образом, пфаффовы производные ε_{ij} в отличие от частных дифференцирований ∂_{ij} связаны с многообразием на более высоком уровне, так как кроме базисных координат включают и слоевые координаты x^i_j, x^i_{jk}.

6. Скобки Ли касательных базисных векторов. Пфаффовы производные ε_{ij} будем считать производными векторов ε_i по направлению векторов ε_j: $\varepsilon_{ij} = \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i$. Тогда альтернации (без множителя) пфаффовых производных ε_{ij} являются скобками Ли векторов ε_i: $[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \partial_{\varepsilon_i}\varepsilon_j - \partial_{\varepsilon_j}\varepsilon_i = \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ij} = 0$. Таким образом, для векторов ε_i построена скобка Ли:

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, \tag{10}$$

т. е. $\{\varepsilon_i\}$ — голономный репер. Также можно сказать, что пфаффовы производные ε_{ij} векторов ε_i позволяют построить скобку векторов: $[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \overset{\omega}{\partial}_i \varepsilon_j - \overset{\omega}{\partial}_j \varepsilon_i = \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ij} = 0$. Для построенной скобки (10) очевидно выполнение тождества Якоби.

В разложении $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$ присутствует обратная матрица слоевых координат, поэтому в силу известной формулы

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

и очевидных равенств $\partial_k \overset{*}{x}{}^l_j = 0$ получим

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = [\overset{*}{x}{}^k_i \partial_k, \overset{*}{x}{}^l_i \partial_l] =$$
$$= \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j [\partial_k, \partial_l] + \overset{*}{x}{}^k_i \partial_k \overset{*}{x}{}^l_j \partial_l - \overset{*}{x}{}^l_j \partial_l \overset{*}{x}{}^k_i \partial_k = 0 .$$

Рассматривая dM как линейное преобразование касательного пространства $T_M X_m$, с помощью условий сопряженности реперов получены (естественные с точки зрения аппарата исследования) равенства: $dM(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$.

Для линейного отображения $d\varepsilon_i : T_M X_m \to T_M^2 X_m$ из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка имеем: $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_k x^k_{ij}$. С точностью до слоевых координат x^i_j 1-го порядка имеем $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_{ij}$. В любом случае справедливо равенство

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = d\varepsilon_j(\varepsilon_i) - d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = 0 .$$

7. Скобка Ли произвольных касательных векторов. Рассмотрим произвольный касательный вектор $x = x^i \varepsilon_i \in T_M X_m$. Дифференцируя вектор *x*, получим

$$dx = \varepsilon_i (dx^i + x^j \omega^i_j) + x^i \varepsilon_{ij} \omega^j .$$

Условия инвариантности вектора *x* имеют следующий вид:

$dx^i + x^j \omega^i_j = x^i_j \omega^j$, где $x^i_j = \overset{\omega}{\partial}_j x^i = \partial_{\varepsilon_j} x^i$, тогда $dx = x_i \omega^i$, причем

$$x_i = [\overset{\omega}{\partial}_i x = \partial_{\varepsilon_i} x] = x^j_i \varepsilon_j + x^j \varepsilon_{ji} \qquad (11)$$

— *пфаффовы производные вектора x*.

Скобку $[x, y]$ можно найти, используя известную формулу $[x, y] = \partial_x y - \partial_y x$. Действительно,

$$[x, y] = \partial_x y - \partial_y x = x^i \partial_{e_i} y - y^i \partial_{e_i} x \overset{(11)}{=} y_i x^i - x_i y^i .$$

При вычислении скобки векторов пространства $T_M X_m$ можно также использовать формулу

$$[x, y] = dy(x) - dx(y) = y_i \omega^i (x) - x_i \omega^i (y) .$$

Учитывая условия сопряженности базисов, получим

$$[x, y] = y_i x^i - x_i y^i .$$

С помощью обозначений (11) приведем скобку к виду

$$[x, y] = (y^i_j x^j - x^i_j y^j) \varepsilon_i . \tag{12}$$

Последнее равенство показывает, что $[x, y] \in T_M X_m$.

Коммутатор (12) в касательном пространстве $T_M X_m$ обладает известными свойствами кососимметричности, аддитивности, однородности. Для доказательства тождества Якоби покажем, что произведение векторов (векторных полей) соответствует композиции их действий на функциях. Имеем $x(f) = df(x) = x^i f_i$. Тогда

$$xy(f) = x(yf) = x(y^i f_i) = x^j (y^i_j f_i + y^i f_{ij}) ,$$

$$yx(f) = y(xf) = y(x^i f_i) = y^j (x^i_j f_i + x^i f_{ij}).$$

При вычитании вычисленных выражений в силу симметрии пфаффовых производных f_{ij} получим

$$xy(f) - yx(f) = (y^i_j x^j - x^i_j y^j) f_i ,$$

$$(xy - yx)(f) = (y^i_j x^j - x^i_j y^j) \partial_{e_i} f .$$

Тогда можно легко доказать тождество Якоби

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 ,$$

раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. М., 1967.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С. 5—247.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

5. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139—189.

6. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия : учеб. пособие для вузов. М., 1988.

7. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

K. Polyakova

Dual methods of investigation of differential-geometric structures

We proceed the studying manifold carried out by means of covariant method in [7] and based on derivation formulae and structure equations.

УДК 514.75

Ю.И. Попов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Связности на оснащенной регулярной гиперполосе SH_m

Данная статья является продолжением работы [1]. На оснащенной полем нормалей 1-го рода гиперполосе SH_m[1] введены внутренние аффинные и нормальные центроаффин-