Библиографический список

1. *Щербаков Р.Н., Малаховский В.С.* Краткий курс аналитической геометрии. Томск, 1964. 382 с.

2. *Малаховская С.В.* Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1982. Вып. 13. С. 60 - 64.

3. *Шмелева С.В.* Об одном классе конгруэнций квадрик в $\mathbf{P_3}$ с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 127 - 132.

4. *Малаховский В.С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72 с.

S. V. Shmeleva

ON ONE CLASS OF CONGRUENCES OF RULED QUADRICS WITH A FOCAL TETRAHEDRON

A class T of congruences of nondegenerated ruled quadrics Q whose four focal points A_0, A_1, A_2, A_3 form self-polar tetrahedron of a third genus of a quadric Q in which A_0A_i, A_3A_i (i=1,2) are rectilinear generatrixes, where A_0 is a point of the second order and a focal surface (A_3) degenerated into a line is investigated in a three- dimensional projective space P_3. It is proved, that focal surfaces (A_0), (A_1), (A_2) are one and the same quadric and focal surfaces of a rectilinear congruence (A_0A_3) are degenerated into lines, whose tangents passes through focuses F_1 and F_2 of a ray A_1A_2 of a rectilinear congruence (A_1A_2) one of which describes a line as well.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНГРУЭНЦИЙ ОСНАЩЕННЫХ КОНИК В A_3

Е.А. Щербак

(*Калининградский государственный университет*)

Продолжаются исследования [1] конгруэнций **К** оснащенных коник $\mathbf{F = \{F_1, F_2\}}$, где $\mathbf{F_1}$— центральная коника, а $\mathbf{F_2}$ — точка, неинцидентная плоскости коники $\mathbf{F_1}$. Получены новые геометрические свойства конгруэнций **К**, в том числе необходимое и достаточное условие того, что точка **А** — фокус луча $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha]$ конгруэнции $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Отнесем конгруэнцию **К** к реперу $\mathbf{R} = \{\mathbf{A}, \bar{e}_\alpha\}$, начало **А** которого совмещено с центром коники $\mathbf{F_1}$, концы $\mathbf{E_i}$ векторов $\bar{e}_i$ $(\mathbf{i, j = 1, 2})$ расположены на конике $\mathbf{F_1}$ так, что $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно $\mathbf{F_1}$, причем вектор $\bar{e}_2$ параллелен касательной плоскости поверхности $(\mathbf{F_2})$ в точке $\mathbf{F_2}$, а конец $\mathbf{E_3}$ вектора $\bar{e}_3$ помещен в точку $\mathbf{F_2}$. Уравнения коники $\mathbf{F_1}$ и система уравнений Пфаффа конгруэнции **К** имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0,\ x^3 = 0; \tag{1}$$

$$\omega^\alpha = \Gamma_i^\alpha \Omega^i,\ \omega_i^\alpha = \Gamma_i{}^\alpha{}_j \Omega^j,\ \omega_3{}^3 = \Gamma_3{}^3{}_i \Omega^i, \tag{2}$$

где главные формы $\Omega^i=\omega_3{}^i$ приняты за независимые формы конгруэнции **К**. Условие параллельности вектора $\bar{e}_2$ касательной плоскости поверхности $(\mathbf{F_2})$ в точке $\mathbf{F_2}$ записывается в виде:

$$(\Gamma_1{}^1 + \Gamma_{31}{}^1)(\Gamma_2{}^3 + \Gamma_{32}{}^3) - (\Gamma_2{}^1 + \Gamma_{32}{}^1)(\Gamma_1{}^3 + \Gamma_{31}{}^3) = 0. \tag{3}$$

Анализируя систему уравнений (2) с учетом (3), приходим к выводу, что конгруэнция **К** существует и определяется с произволом девяти функций двух аргументов.

Координаты фокальных точек коники $\mathbf{F_1}$ конгруэнции $(\mathbf{F_1})$ находятся из уравнений (1) и уравнения:

$$((x^1)^2 \Gamma_{11}{}^1+x^1 x^2 (\Gamma_{21}{}^1+ \Gamma_{11}{}^2)+ (x^2)^2\Gamma_{21}{}^2+x^1\Gamma_1{}^1+x^2\Gamma_1{}^2)(x^1\Gamma_{12}{}^3+x^2\Gamma_{22}{}^3+\Gamma_2{}^3)-$$
$$-((x^1)^2 \Gamma_{12}{}^1+x^1 x^2 (\Gamma_{22}{}^1+\Gamma_{12}{}^2)+(x^2)^2\Gamma_{22}{}^2+x^1\Gamma_2{}^1+x^2\Gamma_2{}^2)(x^1\Gamma_{11}{}^3+x^2\Gamma_{21}{}^3+\Gamma_2{}^3) = 0. \tag{4}$$

Теорема 1.Точка $\mathbf{E_j}$ тогда и только тогда является фокальной точкой коники $\mathbf{F_1}$ конгруэнции $(\mathbf{F_1})$, когда формы Пфаффа $\omega_j{}^j + \omega^j$ и $\omega_j{}^3 + \omega^3$ линейно зависимы (по $\mathbf{j}$ — не суммировать).

Доказательство. Из (4) следует, что $\mathbf{E_j}$ является фокальной точкой коники $\mathbf{F_1}$ конгруэнции $(\mathbf{F_1})$ тогда и только тогда, когда

$$(\Gamma_{j1}{}^j + \Gamma_1{}^j)(\Gamma_{j2}{}^3 + \Gamma_2{}^3) - (\Gamma_{j2}{}^j + \Gamma_2{}^j)(\Gamma_{j1}{}^3 + \Gamma_1{}^3) = 0. \tag{5}$$

Условие линейной зависимости форм Пфаффа $\omega_j{}^j + \omega^j$ и $\omega_j{}^3 + \omega^3$ имеет вид: $(\omega_j{}^j+\omega^j) \wedge (\omega_j{}^3+\omega^3) = 0$ или

$$(\Gamma_{j1}{}^j + \Gamma_1{}^j)(\Gamma_{j2}{}^3 + \Gamma_2{}^3) - (\Gamma_{j2}{}^j + \Gamma_2{}^j)(\Gamma_{j1}{}^3 + \Gamma_1{}^3) = 0. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), убеждаемся в справедливости теоремы.

В дальнейшем будем считать, что α, β, γ — попарно различны, принимают значения **1, 2, 3** и по ним не производится суммирование.

Теорема 2.Если координатная плоскость $[\mathbf{A}, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta]$, является касательной плоскостью поверхности **(А)**, то аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(\mathbf{A}, \bar{e}_\gamma)$ к конгруэнции касательных плоскостей поверхности **(А)** существует тогда и только тогда, когда форма Пфаффа $\omega_\gamma{}^\gamma$ есть полный дифференциал некоторой функции.

Доказательство. Если плоскость $[\mathbf{A}, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta]$ является касательной плоскостью поверхности **(А)**, то

$$\omega^\gamma = 0. \tag{7}$$

Замыкание (7) дает:

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha{}^\gamma + \omega^\beta \wedge \omega_\beta{}^\gamma = 0. \tag{8}$$

Условие аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции **(A, $\bar{e}_\gamma$)** к конгруэнции касательных плоскостей [**A, $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$**] поверхности **(A)** с учетом (7) и (8), имеет вид:

$$\omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\alpha^\gamma + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\beta^\gamma = 0. \qquad (9)$$

Форма Пфаффа ω_γ^γ тогда и только тогда является полным дифференциалом некоторой функции, когда $D\omega_\gamma^\gamma = 0$ или выполняется равенство (9), откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3.Точка **A** тогда и только тогда является фокусом луча **[A, $\bar{e}_\alpha$]** конгруэнции **(A, $\bar{e}_\alpha$)**, когда формы Пфаффа ω^β и ω^γ линейно зависимы.

Доказательство. Точка **A** является фокусом луча **[A, $\bar{e}_\alpha$]** конгруэнции **(A, $\bar{e}_\alpha$)** тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^\beta\Gamma_2^\gamma - \Gamma_2^\beta\Gamma_1^\gamma = 0$ или $\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = 0$, а это и означает линейную зависимость форм ω^β и ω^γ.

Библиографический список

1. *Щербак Е.А.* О конгруэнциях пар фигур, порожденных коникой и точкой в **A_3** // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1986.С. 110 - 114.

E. A. S c h e r b a k

ON SOME PROPERTIES OF CONGRUENCES
OF EQUIPPED CONICS IN A_3

Investigation of congruences K equipped conics $F=\{F_1, F_2\}$ are continued, where F_1 is a central conic and F_2 is a point, not incident to a plane of the conic F_1. New geometric properties of the congruence K are obtained.

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ГОЛОНОМНОГО И НЕГОЛОНОМНОГО ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Под центропроективным многообразием понимается результат проективизации дифференцируемого многообразия, при которой касательные линейные пространства всех порядков превращаются в центропроективные пространства тех же размерностей. При этом различаются голономные и неголономные центропроективные многообразия, полученные из соответствующих дифференци-