ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7
1976

УДК 513.73

Ж.Н. Багдасарян

СОПРЯЖЕННАЯ СЕТЬ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n, АССОЦИИРОВАННОЙ С СЕМЕЙСТВОМ КОНУСОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, образованную вершинами $(n-1)$-параметрического семейства невырожденных $(n-2)$-мерных конусов K' второго порядка, причем каждый конус K' лежит в касательной гиперплоскости к V_{n-1} в соответствующей точке. Говорят, что сеть линий на гиперповерхности V_{n-1} является сопряженной, если в подвижном репере, построенном на касательных к линиям сети, тензор a_{ij} [2] имеет канонический вид. На гиперповерхности V_{n-1} существует много сопряженных сетей. Из всех сопряженных сетей мы выберем ту, которая сопряжена и относительно конуса K': $b_{ij}x^ix^j=0$, $x^n=0$. Отсюда следует, что две квадратичные формы

$$\Phi: a_{ij}x^ix^j, \quad K': b_{ij}x^ix^j \tag{1}$$

должны допускать одновременно приведение к каноническому виду. Мы будем предполагать такое приведение возможным.

Если направления $L_1(y^1,y^2,\dots,y^{n-1})$ и $L_2(x^1,x^2,\dots,x^{n-1})$ сопряжены относительно конусов Φ и K', то должны иметь место равенства:

$$a_{ij}x^iy^j=0, \quad b_{ij}x^iy^j=0, \quad i,j,k\ldots=1,2,\dots,n-1. \tag{2}$$

Направление $L_2(x^1,x^2,\dots,x^{n-1})$, обладающее сопряженным направлением относительно конусов Φ и K', определяется из сис-

темы уравнений

$$(a_{ij}-\alpha b_{ij})x^j=0. \tag{3}$$

Система (3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$|a_{ij}-\alpha b_{ij}|=0. \tag{4}$$

Пусть $$a_{ij}=a_{ii}\delta_{ij}, \quad b_{ij}=b_{ii}\delta_{ij}, \tag{5}$$

где δ_{ij} -символ Кронекера.

Учитывая соотношение (5), решение системы (4) запишется так:

$$\alpha_i=\frac{a_{ii}}{b_{ii}}. \tag{6}$$

Здесь α_i -характеристические корни уравнения (4), которые в рассматриваемом случае предполагаются различными, а a_{ii} и b_{ii} -это собственные значения тензоров a_{ij} и b_{ij}. Условие (5) геометрически означает, что вершины A_i репера R [2] мы расположим на касательных к линиям сети. Тогда формы ω_j^i $(i\neq j)$ становятся главными, и они выражаются через базисные формы ω^i следующим образом

$$\omega_j^i=a_{jk}^i\omega^k \quad (i\neq j). \tag{7}$$

Коэффициенты a_{ii} и b_{ii} конусов Φ и K' удовлетворяют уравнениям

$$da_{ii}=a_{ii}(2\omega_i^i-\omega_0^0-\omega_n^n)+\lambda_{iik}\omega^k,$$

$$db_{ii}=b_{ii}\left(2\omega_i^i+\frac{2}{n-1}\omega_0^0+\frac{2}{n-1}\omega_n^n\right)+\mu_{iik}\omega^k,$$

а формы ω_j^i $(i\neq j)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{ii}\omega_j^i+a_{jj}\omega_i^j&=-\lambda_{ijk}\omega^k,\\ b_{ii}\omega_j^i+b_{jj}\omega_i^j&=-\mu_{ijk}\omega^k. \end{aligned} \tag{8}$$

В системе (8) $(n-1)(n-2)$ уравнений с $(n-1)(n-2)$ неизвестными. Так как в системе (8) при замене индексов i и j мы снова получаем прежнюю систему, то можем вычислить только формы

$$\omega_j^i = \frac{a_{jj}\mu_{ijk} - b_{jj}\lambda_{ijk}}{a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}} \qquad (i \neq j), \tag{9}$$

где $\Delta = a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii} \neq 0$.Сравнивая соотношение (9) с соотношением (7) ,заключаем,что сетевой объект,связанный с сопряженной сетью,определяется функциями:

$$a_{jk}^i = \frac{a_{jj}\mu_{ijk} - b_{jj}\lambda_{ijk}}{a_{ii}b_{jj} - a_{jj}b_{ii}}. \tag{10}$$

Из (I0) следует,что внутренний фундаментальный объект охвачен объектами $(a_{ii}, a_{jj}, b_{ii}, b_{jj}, \lambda_{ijk}, \mu_{ijk})$.

Т е о р е м а I. Задание поля конусов $K': b_{ij}x^i x^j = 0, x^4 = 0$ на гиперповерхности V_{n-1} пространства P_n в общем случае выделяет единственную сопряженную сеть.

Эту сеть мы обозначим $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$.

Теперь посмотрим,когда сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ является голономной.Известно,что если сеть голономна,то в подвижном репере,построенном на касательных к линиям этой сети,каждое из уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируемо.Критерием голономности сети в указанном репере является выполнение соотношения

$$a_{jk}^i = a_{kj}^i \qquad (i, j, k - \text{различны}). \tag{11}$$

Т е о р е м а 2. Для того,чтобы сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ на гиперповерхности V_{n-1} пространства P_n была голономной,необходимо и достаточно ,чтобы имело место условие

$$\mu_{ijk} = \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2\alpha_i\alpha_j}\lambda_{ijk}, \tag{12}$$

где α_i, α_j имеют вид (6) и i, j, k —все различны.

Необходимость.Пусть сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ голономна,т.е.имеют место соотношения (II),которые с учетом (I0) запишутся так:

$$\frac{b_{jj}\lambda_{ijk} - a_{jj}\mu_{ijk}}{b_{ii}a_{jj} - b_{jj}a_{ii}} = \frac{b_{kk}\lambda_{ikj} - a_{kk}\mu_{ikj}}{b_{ii}a_{kk} - b_{kk}a_{ii}}. \tag{13}$$

Равенство (I3) при помощи обозначений (6)принимает вид

$$\frac{\lambda_{ijk} - \alpha_j\mu_{ijk}}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{\lambda_{ijk} - \alpha_k\mu_{ikj}}{\alpha_k - \alpha_i}. \tag{14}$$

После элементарных преобразований из (I4) получим

$$\alpha_j(\alpha_i - \alpha_k)\mu_{ijk} + \alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)\mu_{kij} = -(\alpha_k - \alpha_j)\lambda_{ijk}. \tag{15}$$

Если в соотношении (I5) проциклируем индексы i, j, k ,то получим еще два равенства:

$$\alpha_i(\alpha_k - \alpha_j)\mu_{ijk} + \alpha_k(\alpha_j - \alpha_i)\mu_{jki} = -(\alpha_i - \alpha_k)\lambda_{ijk}, \tag{16}$$

$$\alpha_j(\alpha_i - \alpha_k)\mu_{jki} + \alpha_i(\alpha_k - \alpha_j)\mu_{kij} = -(\alpha_j - \alpha_i)\lambda_{ijk}. \tag{17}$$

Полученные соотношения (I5),(I6),(I7) можно рассматривать как систему уравнений относительно функций $\mu_{ijk}, \mu_{jki}, \mu_{kij}$. Система (I5)-(I7) имеет решение,так как главный определитель этой системы в силу соотношений $\alpha_i \neq \alpha_j \neq \alpha_k \neq 0$ отличен от нуля,т.е.

$$\Delta' = 2\alpha_i\alpha_j\alpha_k(\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_j) \neq 0.$$

Следовательно ,решение этой системы имеет вид (I2).

Достаточность. Теперь покажем,что если функции μ_{ijk} и λ_{ijk} связаны соотношением (I2),то сопряженная сеть $\Sigma_{n-1}(\Phi, K')$ голономна.Из (I2) значение μ_{ijk} подставим в (I0),тогда получим

$$a_{jk}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2\alpha_i b_{ii}} \qquad (i \neq j \neq k) \tag{18}$$

или

$$a_{jk}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \qquad (i \neq j \neq k). \tag{19}$$

Так как функции λ_{ijk} симметричны относительно всех своих индексов,то из равенства (I9) выходит,что сетевой объект a_{jk}^i —симметричен относительно двух нижних индексов j и k ,т.е.

$$a_{jk}^i = a_{kj}^i = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \qquad (i \neq j \neq k). \tag{20}$$

З а м е ч а н и е. Для голономной сопряженной сети гиперповерхности V_{n-1} главные формы $\omega^i_j\ (i\neq j)$ записываются так:

$$\omega^i_j = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}}\,\omega^k \qquad (i\neq j). \tag{21}$$

Теперь выделим случай, когда гиперповерхность V_{n-1} пространства P_n является $(n-1)$-сопряженной системой. Следуя Р.В. Смирнову [I], $(n-1)$-сопряженной системой называют такую гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_n$, на которой существует сопряженная сеть, обладающая следующими свойствами:

I/из каждой точки V_{n-1} выходит $(n-1)$ линий сети, причем каждая линия принадлежит одному из семейств;

2/касательные к линиям i-го семейства, взятые вдоль любой линии j-го семейства, образуют двумерную развертывающуюся поверхность. Как показал Р.В.Смирнов, гиперповерхность V_{n-1} является $(n-1)$-сопряженной системой, если в подвижном репере, построенном на касательных к линиям сопряженной сети, выполняется соотношение

$$a^i_{jk} = a^i_{kj} = 0 \qquad (i\neq j\neq k). \tag{22}$$

В нашем случае справедлива теорема

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы гиперповерхность V_{n-1} пространства P_n была $(n-1)$-сопряженной системой, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$\mu_{ijk} = 0\ ,\quad \lambda_{ijk} = 0\,. \tag{23}$$

Необходимость. Пусть гиперповерхность V_{n-1} является сопряженной системой, тогда выполняется соотношение (22). Теперь из систем уравнений (8) можем получить следующую систему:

$$\begin{aligned} a_{ii}\,a^i_{jk} + a_{jj}\,a^j_{ik} &= -\lambda_{ijk}\,,\\ b_{ii}\,a^i_{jk} + b_{jj}\,a^j_{ik} &= -\mu_{ijk}\,, \end{aligned} \tag{24}$$

где все i, j, k различны. Из (24) в силу (22) получим соотношение (23).

Достаточность. Пусть справедливо условие (23). Но мы имеем

$$a^i_{jk} = a^i_{kj} = -\frac{\lambda_{ijk}}{2a_{ii}} \qquad (i\neq j\neq k).$$

В силу (23) из последнего соотношения получим (22).

Список литературы

1. С м и р н о в Р.В. Преобразования Лапласа p-сопряженных систем.- ДАН, 71, №3, 1950.

2. Б а г д а с а р я н Ж.Н. Об инвариантном оснащении гиперповерхности, связанной с семейством конусов второго порядка в P_n.- Уч.зап.Ереванского ун-та, №2, 1975.